أساسيات في الفيزياء العامة

خواص المادة – الحرارة – الحركة الموجية والصوت

إعداد

د. عويش بن حربي الغامدي

أستاذ مشارك

قسم الفيزياء – كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز

أعد الرسومات

أ. عمر بن عبد الله الحرتومي

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد الهيئة العامة لدار الكتب والوثائق القومية

إدارة الشئون الفنية

الغامدي، عويش بن حربي

أساسيات في الفيزياء العامة: خواص المادة – الحرارة– الحركة الموجية والصوت/ إعداد عويش بن حربي الغامدي. – ط١. – القاهرة: دار النشر للجامعات، ٢٠٠٦.

٣٤٤ص، ٢٤سم.

تدمك ٥ ١٧٦ ٣١٦ ٩٧٧

١– الفيزياء أ– العنوان

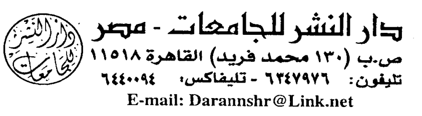
٥٣٠

تاريخ الإصدار: ١٤٢٨هـ – ٢٠٠٧م

رقم الإيداع: ٢٠٠٦/٥٧٤٤

الترقيم الدولي: ISBN: 977-316-176-5

الكود: ٢/١٨٢



دار النشر للجامعات - مصر

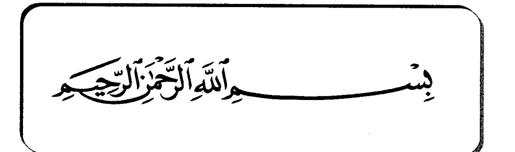
ص.ب (١٣٠ محمد فريد) القاهرة ١١٥١٨

تليفون: ٦٣٤٧٩٧٦ - تليفاكس: ٦٤٤٠٠٩٤

E-mail: Darannshr@Link.net

أساسيات في الفيزياء العامة

خواص المادة – الحرارة – الحركة الموجية والصوت


بسم الله الرحمن الرحيم



مقدمة

أصل هذا الكتاب مجموعة محاضرات ألقيت على طلاب الفيزياء العامة– بكلية العلوم جامعة الملك عبد العزيز بجدة– شملت حركة السوائل وخواص المادة والحرارة والحركة الموجية. وقبل إعداد هذه المحاضرات باللغة العربية كان المُتبع إعطاء الطلاب مرجعًا باللغة الإنجليزية مع الشرح باللغة العربية وإعطاء الواجبات من المرجع المقرر إضافة إلى الاختبارات التي كانت بغير العربية . وقد لاحظنا أن علاقة الطالب بالكتاب المقرر لا تتجاوز في الغالب تصوير مسائل آخر الباب وترجمتها حتى يتسنى له حل الواجبات، ثم إن معاناة أخرى تنشأ أثناء الاختبارات إذ لا بد من ترجمة أكثر المفردات ليتم الفهم قبل الإجابة.

ومن هذا فقد استقر في الوجدان أن من تعلم بغير لغته مع ضعفه فيها فإنه قد تحمل عبأين، عبء اللغة الأجنبية وعبء المادة العلمية. ولهذا قدمنا هذا الجهد المتواضع لأبنائنا الطلاب في المرحلة الجامعية وللمهتمين بهذا الفرع من الفيزياء العامة. وإنا لنشعر أننا أدينا جزءاً يسيراً من الواجب الملقى علينا نحو توفير المعرفة العلمية بلغتنا. والذي يراجع المكتبة العلمية يجد أن جهودا فردية مشكورةً قد بذلت في الترجمة أو التأليف ولا شك أنها لا تغطي كافة المجالات إلا أن انصراف الأستاذ و الطالب عن هذه الكتب بدعوى قصورها قد تثبط همم المؤلفين والناشرين، فنجد هذه الكتب لا زالت في طبعتها الأولى بل إن كثيراً منها قد طبع على نفقة مؤلفيها وبقيت حبيسة مخازنهم.

إن تبسيط العلوم من أجل نهضة علمية واجب تشترك فيه المؤسسات العلمية ومراكز البحث وكل المهتمين .

هذا الكتاب يحوي تسعة أبواب: شمل **البابان الأول والثاني** السوائل الساكنة والمتحركة، و شمل **الباب الثالث** خواص المادة من تركيب بلّوري ومرونة ومعاملات مرونة وطاقة مختزنة وخلافها، وشملت **الأبواب من الرابع إلى السادس** الحرارة مشتملة قياسها وتعريفها وانتقالها، وشمل **الباب السابع** الحركة التوافقية البسيطة وهي مقدمة للحركة الموجية والتي شرحت في **الباب الثامن** ،ثم خصصنا **الباب الأخير** للصوت وهو أحد تطبيقات الحركة الموجية.

ولا يفوتنا أن نشير إلى أن جهدنا في معظمه كان جمع مادة هذا الكتاب من مراجعه المشار إليها في آخر الكتاب أملين أن يكون مدخلا إليها لمن رغب في المزيد .

كما أن التشجيع من إخواننا وزملائنا في قسم الفيزياء كان دافعا لنا لإتمامه كما إن ملاحظات طلابنا الأعزاء كان لها الأثر الكبير في الإقلال من الأخطاء اللغوية والحسابية . كما لا يفوتنا الإشارة إلى الجهد الذي بذله العاملون في مطابع دار مصحف أفريقيا ونخص منهم زميلنا د. حسن محمد علي ، كما أن المراجعة اللغوية قد قام بها الأستاذ الدرديري دفع الله فله منا خالص التقدير والعرفان. كما لا نغفل جهد الأبناء الأعزاء يحيى ووديعة وهبة وعمر الذين أسهموا في طباعة مادته وإعدادها.

د. عويش الغامدي

المحتويات

الموضوع | الصفحة

البـاب الثالث

خواص المادة

الباب الرابع

الحرارة وقياسها

الموضوع الصفحة

الباب الخامس

انتقال الحرارة

الباب السادس

الخصائص الحرارية للمادة

الموضوع الصفحة

البـاب السابع

الحركة التوافقية البسيطة

البـاب الثامن

الحركة الموجية

الموضوع الصفحة

البـاب التاسع

الصوت



الباب الأول

الموائع الساكنة

Fluid Static



مقدمـــة

لا تقل دراسة الموائع أهمية عن دراسة المواد الصلبة خاصة إذا عرفنا أن حالة المائع تشمل المواد السائلة والمواد الغازية . وبنظرة عاجلة نلاحظ أن الموائع هي مقومات أساسية لحياة الإنسان وكافة الكائنات الأخرى ، وعليه فإن تعاملنا معها وحاجتنا الدائمة لها تقضي أن ندرس خصائصها العامة من كثافة ولزوجة ودرجة غليان ودرجة تجمد ، ثم نذهب لدراسة أدق بدراسة تركيبها الذري وتركيبها البلوري ووزنها الجزيئي ونوعها من قلوية وحمضية وتفاعلاتها الكيميائية إلى غير ذلك ، كل ذلك لتتم الاستفادة منها بأفضل ما يكون.

وفي دراستنا للموائع في البابين الأول والثاني سوف نقتصر على دراسة الخصائص العامة لها من كثافة وضغط داخلها وطفو ولزوجة وتوتر سطحي . ثم ندرس حركة السوائل والتي ندرس فيها ما يسمى بالمائع المثالي وهو المائع غير القابل للانضغاط ، وهنا سوف تقتصر الدراسة على السوائل ، ولذا نهمل قوى الاحتكاك الداخلية وكذلك نهمل اللزوجة رغم أنه في حركة السوائل داخل الأنابيب نرى اختلاف السرعات باختلاف محور الحركة وذلك بسبب قوى الاحتكاك واللزوجة . كذلك سندرس ما يدعى بخط التدفق الذي نجد حولها العلاقة بين سرعة السائل ومساحة مقطع المسار وكذلك معدل التدفق. وعموماً سنجد أن السرعة تتغير مقداراً واتجاهاً من نقطة إلى أُخرى على خط التدفق ، وسوف ندرس علاقة سرعات السوائل عند نقاط محددة مع ارتفاع هذة النقاط وذلك باستخدام قانون حفظ الطاقة وقانون تساوي معدل التدفق عند هذه النقاط . ثم نختم دراستنا للبابيـن بدراسة لزوجة السوائل والاستفادة منها في معرفة حركة الأجسام الصلبة داخلها ودراسة نوع حركة السائل من اضطراب و خلافه .

1.1 الكثافة Density

تعرف الكثافة Density لمادة متجانسة بأنها كتلة وحدة الحجم ، ووحدتها الدولية (mks) هي كيلو جرام لكل متر مكعب kg/m^3 أو جرام لكل سنتيمتر مكعب g/cm^3 وذلك بالوحدات المشتقة (cgs) ، وسوف نمثل الكثافة بالحرف الإغريقي ρ

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

ويعطي الجدول (1.1) كثافة بعض المواد وذلك عند درجة حرارة الغرفة وللقيام بالتحويل فإن $1.0g.cm^{-3} = 1000.0kg.m^{-3}$

جدول (1.1) كثافة بعض المواد شائعة الاستعمال

المادة	الكثافة g/cm^3	المادة	الكثافة g/cm^3
الهيدروجين	8.99×10^{-5}	الألومنيوم	2.7
الهيليوم	1.79×10^{-4}	الحديد	7.86
الهواء	1.22×10^{-3}	النحاس	8.92
الأكسجين	1.43×10^{-3}	الفضة	10.5
الكحول الإيثيلي	0.806	الرصاص	11.3
البنزين	0.879	الزئبق	13.6
الثلج	0.917	البلاتين	21.4
الماء	1.00		

وهذه القيم تتغير بتغير درجة الحرارة إذ أن الحجم دالة في درجة الحرارة ونجد من المناسب أن نورد ما يعرف بالجذب النوعي " Specific gravity" للمادة والذي يعرف بأنه النسبة بين كثافة المادة إلى كثافة الماء، ومن التعريف نلاحظ أنها كمية نسبية ولا وحدة لها. وهذا تعريف ضعيف إذ أنه لاعلاقة له بالجاذبية ولهذا يستخدم عوضاً عنه عبارة "الكثافة النسبية Relative density".

مثال 1.1(a)

كرة نصف قطرها *2.0 cm* وكتلتها *300.0g* . عين الكثافة النسبية لمادتها.

الحل :

حجم الكرة وكثافتها

$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 33.5\ cm^3 \quad , \quad \rho_{sph} = \frac{300.0\ g}{33.5\ cm^3} = 8.95\ g/cm^3$

لكن $\rho_w = 1.0\ g/cm^3$

إذن $R.d = \frac{\rho_{sph}}{\rho_w} = \frac{8.95\ g/cm^3}{1\ g/cm^3} = 8.95$

مثال 1.1 (b)

قارن بين كتلة وحدة الحجم لكل من الهواء والماء وكذلك بين كل من [illegible] والألومونيوم.

الحل :

باستخدام العلاقة $m = \rho V$ وقيم الكثافة من الجدول نجد أن

$m_{Al} = 2.7x10^6 g \quad , \quad M_w = 10^6 g \quad , \quad m_{air} = 1.22g$

ومنها فإن

$\frac{m_{Al}}{m_w} = 2.2 \quad , \quad \frac{m_w}{m_{air}} = 8.2x10^5$

1.2 الضغط في السوائل Pressure in fluids

لاشك أن الضغط الجوي يختلف من مكان إلى آخر إذ أنه يزداد بالاتجاه إلى مستوى سطح البحر ويقل بالاتجاه نحو المرتفعات كذلك يزداد الضغط في المحيطات والبحار بزيادة العمق وعليه فإننا نعرف الضغط عند أي نقطة بأنه

"النسبة بين القيمة العددية للقوة العمودية إلى المساحة الواقعة تحت تأثير هذه القوة " أي أن

$$P = \frac{F}{A} \tag{1.2}$$

وحيث إن الضغط داخل السائل يختلف من نقطة إلى أخرى، فإنه يمكن استخدام ΔF وΔA لتعبر عن القوة والمساحة عند النقطة، ونعيد كتابة المعادلة السابقة بالصيغة:

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \tag{1.3}$$

وحيث إن الضغط هو قوة لكل وحدة مساحة فإن وحدته هي N/m^2 ويُعبر عنها بالباسكال (Pa) Pascal أي أن $1\ Pa = 1\ N/m^2$

ولحساب الضغط داخل سائل ساكن نأخذ شريحة مساحة قاعدتها A ووزنها dw وسمكها dy وتبعد عن قاع الوعاء مسافة y ، انظر الشكل (1.1) وتؤثر عليها القوة $(P+dP)A$ إلى أسفل والقوة PA إلى أعلى ووزنها $dw = mg = \rho\, dVg = \rho gAdy$ إلى أسفل وحيث إن الشريحة في حالة اتزان فإن

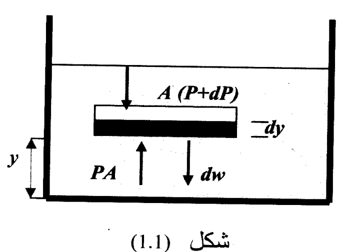
$$\sum F_y = PA - (P + dP)\,A - \rho gAdy = 0$$

إذن

$$dP + \rho g dy = 0$$

أو

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \qquad (1.4)$$



شكل (1.1)

ومن هذه النتيجة يتضح أنه بزيادة الارتفاع الموجب dy يتناقص الضغط dP (سالب) . إذا كان P_1 و P_2 هما الضغط عند الارتفاعين y_1 و y_2 على التوالي فإن

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \qquad (1.5)$$

أو

$$P_1 = P_2 + \rho g(y_2 - y_1) \qquad (1.6)$$

والأن نفرض أن الوعاء مفتوح وأن ارتفاع السائل به y_2 وارتفاع النقطة عن القاعدة هو y_1 وأن $h = y_2 - y_1$ ومنه ينتج أن P_2 تمثل الضغط الجوي [انظر الشكل (1.2)] ومنه نجد أن:

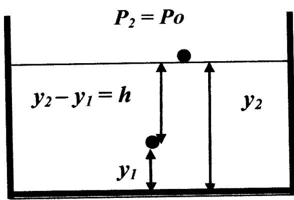
$$P = P_0 + \rho g h \qquad (1.7)$$

حيث:

$$P_0 = 1.013 \times 10^5 \, Pa$$

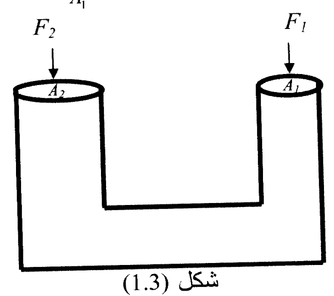
وذلك عند سطح البحر وهو مايعادل ضغط جوي واحد One atmospheric.

بتعبير آخر نقول إن الضغط المطلق P (Absolute pressure) على عمق h من سطح سائل مفتوح على الفضاء يزيد عن الضغط الجوي بمقدار ρgh . ومن المعادلة نلاحظ أن الضغط داخل سائل لا يعتمد على شكل الوعاء وأنه متساوٍ عند النقاط ذات الارتفاع الواحد، وحيث إن الضغط داخل السائل يعتمد فقط على العمق فإن أي زيادة في الضغط عند سطح السائل تنتقل إلى كل نقطة داخله. هذه الحقيقة قام بإيضاحها الفرنسي باسكال Pascal (1623-1662) في صيغة قانون نصه" أي زيادة في الضغط على سائل محصور تنتقل غير منقوصة إلى كل نقطة في السائل وإلى الوعاء المستخدم".



شكل (1.2)

هذا القانون له استخدامات كثيرة خاصةً في الروافع المستخدم بها سوائل. فإذا نظرنا إلى الشكل (1.3) وفيه أثرنا بقوة F_1 على مساحة صغيرة A_1 فينتقل الضغط إلى مساحة أكبر هي A_2 لنحصل على قوة أكبر من F_1 وبمقدار يعادل $\frac{A_2}{A_1}$ وذلك لأن:



$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

أي أن:

$$F_2 = (\frac{A_2}{A_1})F_1$$

شكل (1.3)

1.3 مقاييس الضغط Pressure gauges

ما ذكرناه في الفصل السابق يمكن تطبيقه على بعض أجهزة قياس الضغط للغازات، وأبسطها هو المانوميتر Manometer الموضح في الشكل (1.4a) وهو أنبوب على شكل الحرف U يحوي سائلاً، أحد طرفيه مفتوح على الضغط الجوي والآخر موصول بالغاز المراد معرفة ضغطه. وحيث إن الضغط في أسفل نقطة من السائل مشترك بين شقي الأنبوب فإن:

$$P + \rho g y_1 = P_0 + \rho g y_2 \tag{1.8}$$

منها يكون:

$$P - P_0 = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \tag{1.9}$$

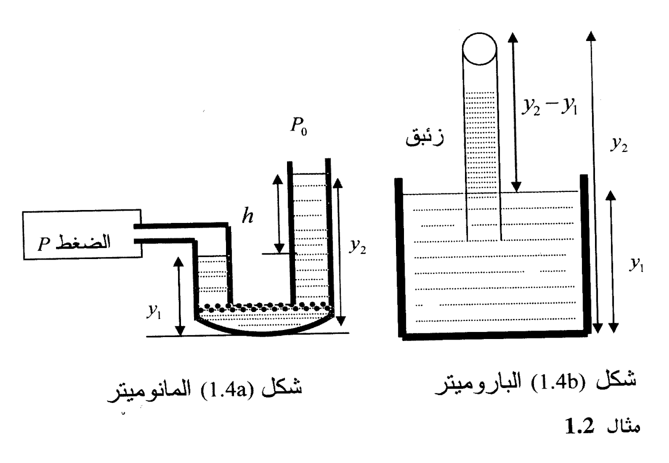
ويسمى الضغط P بالضغط المطلق absolute pressure بينما يدعى الفرق $P - P_0$ بالضغط المقاس gauge pressure.

أما **المقياس الثاني فهو الباروميتر barometer** وهو أنبوب زجاجي طويل مليء بالزئبق ونُكِس في وعاء به زئبق شكل (1.4b) والضغط على سطحه هو الضغط الجوي، أما الفراغ في أعلى الأنبوب الزجاجي فإنه مفرغ إلا من بخار الزئبق الذي يمكن إهمال ضغطه وعليه فإن $P_2 = 0$ ومنه نجد أن:

$$P_0 = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \tag{1.10}$$

ذكرنا سلفاً أن وحدة الضغط هي الباسكال ويستحسن أن نشير إلى وحدات أخرى أقل استعمالاً وأقل شهرة ومنها one bar ويساوي $10^5\ Pa$ أي الضغط الناتج عن عمود من الزئبق ارتفاعه $75.0cm$ وكذلك الوحدة الأخرى وهي Torr نسبة إلى (Torricelli) وهي تعتمد على الكثافة والتي تتغير مع درجة الحرارة وكذلك مع الجاذبية الأرضية المعتمدة على موقع القياس أما ارتفاع عموده فهو واحد ملم ولهذه

الأسباب لم يعد يُستعمل.



شكل (1.4b) البارومیتر

شكل (1.4a) المانومیتر

مثال 1.2

في ورشة لإصلاح السيارات يوجد رافعة سُلط ضغط على المكبس الأصغر والذي نصف قطره $5.0cm$ والذي انتقل إلى المكبس الأكبر والذي نصف قطره $20.0cm$.

أ–احسب القوة المؤثرة على المكبس الأصغر لنتمكن من رفع سيارة وزنها $2.0 \times 10^4\ N$.

ب– احسب الضغط اللازم لإنتاج هذه القوة.

الحل :

حيث إن الضغط ينتقل كاملاً إلى كل نقطة داخل السائل فإنه يمكن استعمال المعادلة :

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

$$F_1 = \frac{\pi(5.0\times10^{-2}m)^2}{\pi(20.0\times10^{-2}m)^2}(2.0 \times 10^4\text{N}) = 1250.0N$$

وهي قيمة صغيرة مقارنة بوزن السيارة.

أما الضغط المسبب لهذه القوة فهو:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = 1.59\times10^5 \ Pa$$

مثال 1.3

احسب الضغط المطلق على عمق $1500.0\ m$ من سطح المحيط.

الحل :

$$P = P_0 + \rho gh$$

$$= 1.013\times10^5 \ Pa + \left(1.0\times10^3 kg/m^3\right)\left(9.8m/s^2\right)(1500.0m) = 1.48\times10^7 \ Pa$$

وهذا أكبر من الضغط الجوي بحوالي 146 مرة.

مثال 1.4

احسب الضغط الجوي في يوم يرتفع فيه الزئبق $76.0cm$ في أنبوبة الباروميتر.

الحل :

من المعلوم أن الكثافة ρ تتغير بتغير درجة الحرارة أما عجلة الجاذبية g فإنها تتغير بتغير المكان ، إلا إنها تفرض ثابتة في هذا المثال

$$P = \rho gh$$

$$P = (13.6\times10^3 kg/m^3)(9.8\frac{m}{s^2})(0.76m)$$

$$= 1.013\times10^5 Pa = 1.0 \ atm$$

مثال 1.5

أسطوانة بها أكسجين مضغوط كثافته $1.25kg/m^3$ ودرجة حرارته $49.0°C$ وصلت الأسطوانة بمقياس المانوميتر. إذا اعتبرنا الأكسجين غازا مثاليا فاحسب ارتفاع الزئبق داخل عمود المانوميتر .

الحل:

للغاز المثالي يمكن حساب الضغط داخل الأسطوانة من القانون العام للغازات $PV = nRT$ وحيث إن $V = \frac{m}{\rho}$ و $n = \frac{m}{M}$ والتي لها القيم $M = 32.0g/mole$ و $R = 8.314J/mole.K$ و $T = (273.0 + 49)K = 322.0K$ فإن

$$P\frac{m}{\rho_0} = \frac{m}{M}RT$$

ومنها فإن:

$$P = \frac{\rho_0}{M}RT = \left[\frac{1.25}{32\times10^{-3}}\times 8.314\times 322\right]Pa = 1.046\times10^5\,Pa$$

وحيث إن المانوميتر مفتوح فإن $P - P_\circ = \rho_{Hg}gh$

ومنها فإن:

$$h = \frac{P - Po}{\rho_{Hg}g} = \left(\frac{1.046\times10^5 - 1.013\times10^5}{13.6\times10^3\times 9.8}\right)m = 2.476cm$$

مثال 1.6

احسب محصلة القوة المؤثرة على سد تجمع خلفه مياه بارتفاع H علماً أن عرض السد هو L كما يظهر بالشكل (1.5) .

الحل :

حيث إن الضغط الجوي يؤثر على وجهي محيط منطقة السد فإنه يمكن إهماله، وعليه فإن الضغط على عمق h من سطح الماء هو:

$$P = \rho gh = \rho g(H - y)$$

القوة الواقعة على شريحة مساحتها $dA = Ldy$ هي:

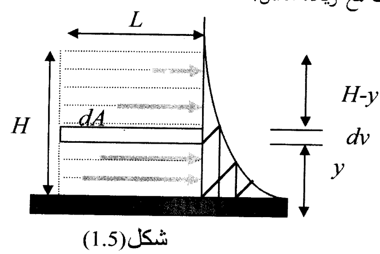
$$dF = PdA = \rho g(H - y)Ldy$$

القوة الكلية المؤثرة على وجه السد هي:

$$F = \int dF = \int_0^H \rho g(H - y)Ldy = \frac{1}{2}\rho gLH^2$$

خذ $H=30.0m$ و $L=100.0m$ نجد أن $F = 4.41\times10^8 N$

وهي قوة كبيرة جداً ولهذا فإنه بزيادة الضغط مع زيادة العمق يجعل من اللازم تصميم السدود بحيث يزيد السمك مع زيادة العمق.



شكل(1.5)

1.4 قاعدة أرشميدس Archimedes Principle

عند غمر جسم كلياً أو جزئياً في سائل فإن السائل يؤثر عليه بقوة إلى أعلى تعادل وزن السائل المزاح.

هذه الحالة نعايشها جميعاً، فنلاحظ أنه يسهل رفع الأجسام داخل السوائل بخلاف رفعها خارجها فنجد أنه يسهل حمل متدرب سباحة داخل الماء بينما يصعب ذلك بعد خروجه.

ولدينا حالتان:

الحالة الأولى: أن يُغمر الجسم جزئياً وفي هذه الحالة تكون قوة الطفو أكبر من وزن الجسم، فإذا فرضنا أن كثافة السائل هي ρ_L وكثافة الجسم الطافي هي ρ_S وحجمه V_S وحجم السائل المزاح V_L فإن وزن الجسم يساوي وزن السائل المزاح، أي أن:

$$W = m_S g = m_L g$$

$$m_S = \rho_S V_S = \rho_L V_L$$

أي أن:

$$\frac{\rho_S}{\rho_L} = \frac{V_L}{V_S} \tag{1.11}$$

الحالة الثانية: أن يُغمر الجسم كلياً

في هذه الحالة ، حجم السائل المزاح هو حجم الجسم المغمور ، وعليه فإن:

$$\Delta F = F - W = (\rho_L - \rho_S) V_S g \tag{1.12}$$

حيث F هي قوة الطفو إلى أعلى ومن هذه المعادلة نلاحظ ثلاث حالات:

أولاً- إذا كانت كثافة السائل أكبر من كثافة الجسم ($\rho_L > \rho_S$) فإن قوة الدفع

إلى أعلى أكبر من وزن الجسم وهنا فإن الجسم يطفو وتطبق عليه في هذه الحالة المعادلة (1.11) .

ثانياً – إذا تساوت الكثافتان فإن الجسم يكون في حالة اتزان داخل السائل ومحصلة القوى المؤثرة عليه تساوي الصفر.

ثالثاً – إذا كانت كثافة الجسم أكبر من كثافة السائل فإن الجسم يتجه إلى قاع الوعاء.

مثال 1.7

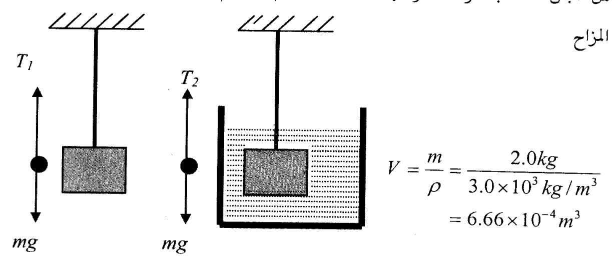
جسم كتلته $2.0kg$ وكثافته $3.0\times10^3 kg/m^3$ علق بخيط. احسب وزنه داخل وخارج الماء شكل (1.6).

الحل :

وزن الجسم خارج الماء

$$W = mg = (2.0kg)(9.8m/s^2) = 19.6N$$

من أجل حساب قوة الطفو فإنا نحسب حجم الجسم والذي يعادله حجم السائل المزاح



شكل (1.6)

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2.0kg}{3.0\times10^3 kg/m^3} = 6.66\times10^{-4} m^3$$

وحيث إن قوة الطفو تعادل وزن الماء المزاح فإن:

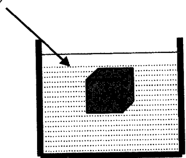
$$F = m_w g = V\rho_w g = (6.66\times10^{-4} m^3)(1.0\times10^3 kg/m^3)(9.8m/s^2) = 6.53\,N$$

إذن وزن الجسم داخل الماء هو:

$$\Delta F = W - F = 19.6N - 6.53N = 13.07N$$

مثال 1.8

طفا مكعب ثلجي على الماء كما بالشكل (1.7). احسب نسبة الثلج الذي يطفو على السطح علما بأن كثافة الثلج $0.917\ kg/m^3$



الحل :

من الحالة الأولى الموضحة سابقاً يتضح أن:

$$\frac{\text{حجم الماء المزاح}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{\text{حجم الجزء المغمور}}{\text{حجم المكعب}}$$

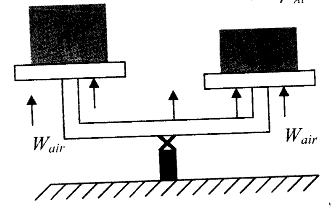
شكل (1.7)

$$= \frac{\text{كثافة الثلج}}{\text{كثافة الماء}} = \frac{917.0}{1000.0} = 0.917$$

إذن الجزء الطافي يمثل الباقي وهو 0.083 أو ٪ 8.3 من حجم الثلج.

مثال 1.9

أستخدمت قطعة من النحاس كتلتها $200.0g$ على إحدى كفتي ميزان لمعادلة قطعة من الألومنيوم على الكفة الأخرى . ما الخطأ في حساب وزن الألومنيوم إذا أهملت قوة الطفو (قوة إلى أعلى) الناتجة عن الهواء ؟ علماً أن $\rho_{Cu} = 8.9\ g/cm^3$ و $\rho_{Al} = 2.7\ g/cm^3$.



الحل :

حيث إن $V = \dfrac{m}{\rho}$

فإن :

$$V_{cu} = \frac{200.0\ g}{8.9\ g/cm^3} = 22.4\ cm^3$$

$$V_{al} = \frac{200.0\ g}{2.7\ g/cm^3} = 74.0\ cm^3$$

$$\Delta V = (74.0 - 22.4)\ cm^3 = 51.6\ cm^3$$

$$\therefore\ \ \Delta W = \rho_{air}\ \Delta V\ g = (0.0013\ g/cm^3)(51.6\ cm^3)(980\ cm/s^2)$$
$$= 65.8\ dyne$$

وهي قوة صغيرة تقابل ضياع في كتلة الألومنيوم قدرها $0.07\ g$ يمكن إهمالها إلا في التجارب التي تتطلب دقة عالية .

مثال 1.10

قطعة ثلج سمكها $1.0m$ وكثافتها $900.0 kg/m^3$ ومساحة وجهها A وضع عليها جسم كتلته $100.0kg$. احسب مقدار هذه المساحة علماً أن الثلج ينغمر بالكامل والجسم يبقى خارج الماء.

الحل :

حيث إن المجموعة متزنة فإن:

$$m_1 g + m_2 g = m_w g$$

وبالتعويض عن القيمة المعطاة فإن:

$$100.0kg + \rho_{ice} V = \rho_w V$$
$$(1000.0kg - 900.0kg)A/m^2 = 100.0kg$$
$$A = \frac{100.0}{100.0} m^2 = 1.0m^2$$

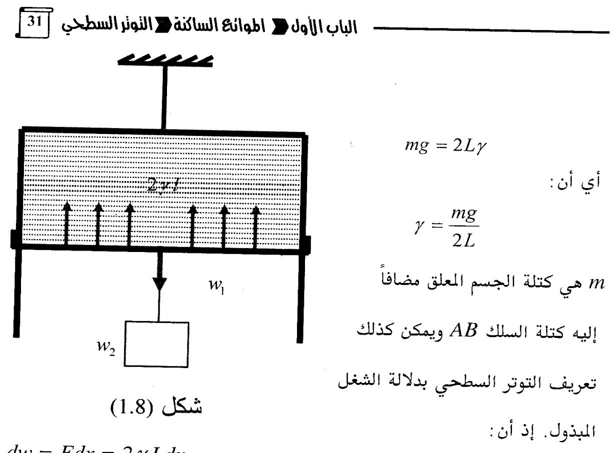
1.5 التوتر السطحي Surface Tension

من أجل فهم ظاهرة التوتر السطحي فإنه يلزم الإشارة إلى بعض الظواهر المشاهدة في الحياة اليومية ، ومنها خروج السوائل من أنبوبة طبية ضيقة على شكل نقاط وليس بشكل مستمر، إذا وضعت إبرة خياطة بعناية فائقة على سطح الماء فإنها تبقى على السطح رغم أن كثافة مادتها أكبر بكثير من كثافة الماء مع حدوث انخفاض حول الإبرة، عند غمر طرف أنبوبة زجاجية ضيقة ونظيفة في ماء نلاحظ ارتفاع الماء داخل الأنبوبة إلى مستوى أعلى من مستوى سطح الماء، أما إذا استُعمل الزئبق فإنه لا يصعد داخل الأنبوبة بل ينضغط إلى أسفل. هذه الظواهر وغيرها كثير مرتبطة بسطح التلامس بين السائل والمواد الأخرى وهذه الظواهر تشير إلى أن سطح السائل يقع تحت إجهاد دائم نتيجة لجذب الجزيئات القريبة من السطح له، ونسمي المنطقة القريبة من السطح والمؤثرة عليه بمنطقة مدى التجاذب وتسمى بالغشاء السطحي *Surface Film* فإذا تخيلنا خطاً وهمياً من سطح السائل طوله L فإن الجزيئات على أحد جوانب هذا الخط تؤثر على الجانب الآخر بقوة جذب قدرها F وعليه يتم تعريف التوتر السطحي بأنه **النسبة بين قوة الجذب والطول العمودي عليها** أي أن:

$$\gamma = \frac{F}{L} \qquad (1.13)$$

أي أنه يقاس بوحدة N/m أو $dyne/cm$.

ولإيضاح ما سبق نجري التجربة الآتية. نحضر سلكاً على شكل حرف U كما بالشكل (1.8) ينزلق عليه سلك AB دون احتكاك. نغمر السلكين في محلول صابون ثم يُرفع ليتكون عليه غشاء رقيق من الصابون ثم يُعلق الإطار رأسيا مما يجعل قوى التوتر السطحي تجذب السطح الملامس للسلك AB والذي يرتفع مسافة قدرها dx هذه القوة قدرها $2\gamma L$ حيث L طول السلك AB وضاعفناه لوجود وجهين للغشاء ولحساب γ فإنا نضع جسم كتلته m يعادل وزنه قوة الجذب أي أن:



شكل (1.8)

$$mg = 2L\gamma$$

أي أن :

$$\gamma = \frac{mg}{2L}$$

m هي كتلة الجسم المعلق مضافاً إليه كتلة السلك AB ويمكن كذلك تعريف التوتر السطحي بدلالة الشغل المبذول. إذ أن :

$$dw = Fdx = 2\gamma Ldx$$

لكن $2Ldx$ يمثل الزيادة في مساحة الغشاء أي أن :

$$dw = \gamma \, \Delta A$$

ومن هنا يعرف التوتر السطحي بأنه **الشغل المبذول لزيادة مساحة السطح بمقدار الوحدة مع ثبات درجة الحرارة وتكون وحدته** (J/m^2).

مثال 1.11

احسب الشغل اللازم لزيادة نصف قطر قطرة من سائل بمقدار ΔR ، كذلك احسب الشغل اللازم لتكوين فقاعة.

الحل :

حيث إن القطرة كروية فإن مساحتها هي :

$$A = 4\pi R^2$$

فإذا زاد نصف القطر بمقدار $\Delta R \approx dR$ فإن الزيادة في مساحة القطرة هي :

$dA = 8\pi R dR$

ويكون الشغل المبذول لحصول هذه الزيادة هو:

$dW = \gamma\ dA = 8\pi\ \gamma R dR$

وعليه فإن الشغل اللازم بذله لتكوين قطرة نصف قطرها R هو:

$$W = \int_0^R 8\pi\gamma r dr = 4\pi\gamma R^2 = \gamma A$$

ولحساب الشغل المبذول لتكوين فقاعة نتبع الخطوات السابقة مع الضرب في اثنين لوجود وجهين للفقاعة أي أن:

$$W = \int_{R_1}^{R_2} 16\pi\gamma r dr = 8\pi\gamma(R_2^2 - R_1^2)$$

حيث R_1 و R_2 يمثلان نصف القطر الداخلي ونصف القطرالخارجي للفقاعة.

مثال 1.12

احسب الشغل اللازم لتفتيت قطرة من زئبق نصف قطرها $1.0mm$ إلى مليون قطرة متشابهة ولها نفس الحجم علماً بأن التوتر السطحي للزئبق هو $0.55N/m$.

الحل :

مساحة سطح القطرة الكبيرة

$$A_1 = 4\pi R_1^2$$
$$= 1.26\times10^{-5}\, m^2$$

حجم القطرة الكبيرة

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi(0.001)^3\, m^3$$

حجم القطرة الصغيرة

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{V_1}{n} = \frac{4}{3}\pi\,(\frac{10^{-9}}{10^{6}})\; m^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi \times 10^{-15}\; m^3$$

إذن :

$$R_2 = 10^{-5}\, m$$

الشغل اللازم لتكوين قطرة صغيرة

$$W_1 = 4\pi\, r^2 \gamma = 6.19 \times 10^{-10} J$$

الشغل اللازم لتكوين 10.0^6 قطرة

$$W = nW_1 = 6.19 \times 10^{-4} J$$

جدول (1.2) بعض القيم التجريبية للتوتر السطحي

السائل ملامساً للهواء	درجة الحرارة C^o	التوتر السطحي Dyne/cm
بنزين	20	28.9
الكحول الإيثيلي	20	22.3
الجليسرين	20	63.1
الزئبق	20	465
زيت الزيتون	20	32.0
محلول الصابون	20	25.0
الماء	0	75.6
الماء	20	72.8
الماء	60	66.2
الماء	100	58.9
الأكسجين	-193	15.7
النيون	-247	5.15
الهيليوم	-269	0.12

1.6 فرق الضغط بين وجهي سطح السائل والتوتر السطحي

لمعرفة العلاقة بين التوتر السطحي وفرق الضغط بين وجهي السائل نعرض رسماً يقرب من المستطيل على سطح السائل طوله وعرضه هما L_2 و L_1 ونصفا قطرا الانحناء لهما R_1 و R_2 كما بالشكل (1.9a) فإذا زاد الضغط داخل السائل بمقدار ΔP فإن سطح السائل سوف يتحرك مسافة مقدارها x ويصبح الطول L_1+dL_1 والعرض L_2+dL_2 ويصبح نصفا قطر التكور R_1+x و R_2+x كما في الشكل(1.9b)، ولحساب ΔP نتبع الخطوات الآتية:

الشغل المبذول نتيجة زيادة الضغط هو:

$$dW = L_1 L_2 \Delta P x \qquad (1.14)$$

وبدلالة التوتر السطحي فإنه:

$$dW = \gamma\, dA = \gamma\, d(L_1 L_2) = \gamma(L_1 dL_2 + L_2 dL_1) \qquad (1.15)$$

ومن المعادلتين نحصل على فرق الضغط

$$\Delta P = \gamma\left(\frac{dL_1}{L_1 x} + \frac{dL_2}{L_2 x}\right) \qquad (1.16)$$

ومن التشابه في الشكل (1.9b) يتضح أن:

$$\frac{L_1 + dL_1}{R_1 + x} = \frac{L_1}{R_1} \qquad (1.17)$$

وبضرب الطرفين في $\frac{R_1}{L_1}$ ينتج أن:

$$\frac{dL_1}{x} = \frac{L_1}{R_1} \qquad (1.18)$$

وبالمثل ينتج أن:

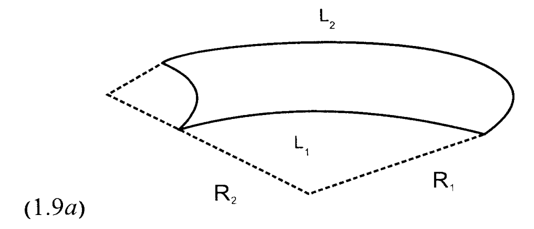
$$\frac{dL_2}{x} = \frac{L_2}{R_2} \qquad (1.19)$$

وبالتعويض من (1.18) و (1.19) في (1.16) ينتج أن:

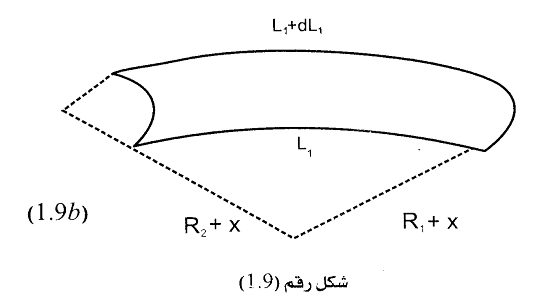
$$\Delta P = \gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \tag{1.20}$$

وفي حالة الغشاء ذي الوجهين تصبح العلاقة بالصيغة

$$\Delta P = 2\gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \tag{1.21}$$



(1.9*a*)



(1.9*b*)

شكل رقم (1.9)

هناك حالات خاصة منها:

1 – إذا كان سطح السائل كروياً وذي وجه واحد مثـل قطـرة سـائل فـإن $R=R_1=R_2$ وتصبح المعادلة (1.21) بالصيغة:

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \tag{1.22}$$

2 – إذا كان سطح السائل كروياً وذا وجهين مثل الفقاعة فإن:

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{R} \tag{1.23}$$

ومن هذه المعادلة يظهر لنا أن فرق الضغط يتناسب عكساً مع نصف القطر أي أن الضغط داخل فقاعة صغيرة أكبر منه داخل فقاعة كبيرة.

3 – إذا كان السائل أسطوانيا فإن $R_1 = R\,, R_2 = \infty$ وعليه فإن:

$$\Delta P = \frac{\gamma}{R} \tag{1.24}$$

وفي حالة الغشاء ذي الوجهين فإن:

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \tag{1.25}$$

مثال 1.13

احسب الضغط داخل قطرة من الزئبق نصف قطرها $4.0mm$ عند درجة حرارة $20.0^\circ C$.

الحل :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2.0\times 465.0\times 10^{-3} N.m^{-1}}{4.0\times 10^{-3} m}$$

$$= 232.5 N.m^{-2} = 2.3\times 10^{-3}\, atm.$$

$$\therefore\ P = P_{air} + 2.3\times 10^{-3} = 1.0023\, atm.$$

مثال 1.14

أعد المثال (1.13) مع قطرة نصف قطرها $2.0mm$ وذلك لملاحظة التناسب العكسي.

الحل :

$$\therefore\ \Delta P = 4.6 \times 10^{-3}\ atm$$

أي ضعف الناتج في مثال (1.13)

مثال 1.15

إذا كان ضغط الهواء داخل فقاعة صابون نصف قطرها $4.0mm$ يساوي ضغط عمود من الماء ارتفاعه $10.0mm$. فاحسب التوتر السطحي داخل الفقاعة.

الحل :

$$\Delta P = h\rho g = 10.0\times10^{-3}m\times10.0^{3}kg/m^{3}\times9.8m/s^{2} = 98.0N.m^{-2}$$

لكن

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{r}$$

أي أن:

$$\gamma = \frac{4.0\times10^{-3}m\times98N.m^{-2}}{4.0} = 0.098N.m^{-1}$$

$$= 98.0dyne/cm$$

1.7 زاوية التلامس والخاصة الشعرية

Contact angle and Capillarity

عند وجود سائل في وعاء يكون لدينا على حدود السائل ثلاثة أوساط متلامسة وهي الجدار الصلب للوعاء نعتبره الوسط الأول والسائل هو الوسط الثاني والهواء هو الوسط الثالث. وتؤثر ثلاث قوى تلامس على منحنى التلامس تتجه كل منها على امتداد المماس لسطح تلامس الوسطين الآخرين وفي الجهة الداخلية لسطح التلامس ونرمز لها بالرموز γ_{12} ، γ_{13} ، γ_{23} كما بالشكل (1.10)

وعادة عندما نتحدث عن التوتر السطحي لسائل فإنما نقصد التوتر بين السائل والهواء ، γ_{23} ، ونعرِّف زاوية التلامس بأنها " الزاوية المحصورة بين السائل والسطح الصلب مقاسة داخل السائل " . ولحساب زاوية التلامس نستفيد من شرط الاتزان عند التقاء الأوساط الثلاثة كالآتي:

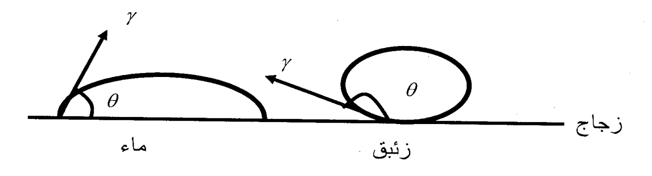
$$\gamma_{13} = \gamma_{12} + \gamma_{23}\cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\gamma_{13} - \gamma_{12}}{\gamma_{23}} \qquad (1.26)$$

γ_{13} γ_{12} γ_{23} θ γ_{13} γ_{23} θ γ_{12}

شكل (1.10)

وعليه فإن الزاوية تعتمد على معاملات التوتر وليس على شكل الوعاء . إذا كان الطرف الأيمن موجبًا فإن θ تكون حادة كما في حالة الماء أما إذا كان سالباً فإن θ تكون منفرجة كما في حالة الزئبق انظر الشكل (1.11) .



شكل (1.11)

لحساب التوتر السطحي باستخدام الخاصية الشعرية يتم ذلك بغمر طرف أنبوبة ضيقة جداً — شعرية– داخل سائل انظر الشكل (1.12a) فإذا كانت زاوية التلامس حادة فإن الضغط تحت السطح مباشرة يكون أقل من الضغط الجوي بمقدار ΔP ولذلك فإن الضغط الجوي المؤثر على السائل في الوعاء يرفع السائل داخل الأنبوبة بما يعادل الفرق في الضغط أي أن:

$$\Delta P = \rho gh = \frac{2\gamma}{R} \tag{1.27}$$

حيث R هو نصف قطر تكور السائل و r هو نصف قطر الأنبوبة والعلاقة بينهما هي $r = R\cos\theta$ وبالتعويض في المعادلة (1.27) فإن:

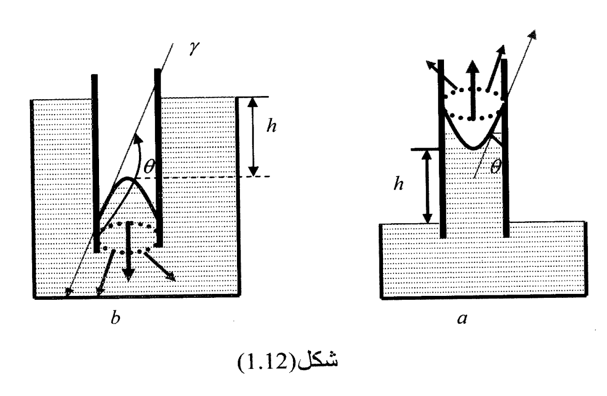
$$\rho gh = \frac{2\gamma\cos\theta}{r} \tag{1.28}$$

أي أن:

$$\gamma = \frac{\rho ghr}{2\cos\theta}$$

ويمكن الوصول إلى المعادلة (1.28) باستخدام قانون الاتزان . فإذا اعتبرنا الأنبوبة أسطوانية ونصف قطرها r فإن السائل يلامس الأنبوبة على خط طوله $2\pi r$ فإذا كانت زاوية التلامس θ فإن مركبة التوتر السطحي إلى أعلى هي $\gamma\cos\theta$ وعليه فإن قوة التوتر إلى أعلى هي $2\pi r\gamma\cos\theta$ والتي تتساوى مع وزن عمود السائل $\rho gh(\pi r^2)$، أي أن:

$2\pi r\gamma\cos\theta = \rho g h(\pi r^2)$ ومنها نستنتج أن:



شكل(1.12)

$$\gamma = \frac{\rho g h r}{2\cos\theta}$$

مثال 1.16

أنبوب شعري نصف قطره $0.2mm$ غمر أحد طرفيه في سائل كثافته $1.37\,g/cm^3$ وتوتره السطحي $27.0\,dyn/cm$ فارتفع السائل $2.0cm$ داخل الأنبوب. احسب زاوية التلامس له.

الحل :

$$\cos\theta = \frac{\rho g h r}{2\gamma} = \frac{1.37g/cm^3 \times 980cm/s^2 \times 2.0cm \times 0.02cm}{2.0 \times 27.0dyn/cm} = 0.995$$

$$\theta = 6.0^0$$

مثال 1.17

أُعيد غمر الأنبوب في المثال السابق في الماء والذي توتره السطحي $75.0dyn/cm$. احسب أقصى ارتفاع يمكن أن يصله الماء داخل الأنبوب.

إذا غُمر الأنبوب بالتدريج في الماء ليصبح ارتفاع الماء داخله واحد سم ، ماذا يحصل في هذه الحالة ؟

الحل :

١- من المعادلة (1.29) يمكن حساب ارتفاع الماء داخل الأنبوب

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$

وللحصول على أعلى ارتفاع متوقع فإنه يلزم أن يكون البسط في المعادلة أعلاه أكبر ما يمكن وهذا يتحقق عند $\theta = 0.0^0$ وبالتعويض عن $\gamma = 75.0dyne/cm$ ونصف قطر الأنبوب $0.2\ mm$ نحصل على الارتفاع

$$h = \frac{2.0 \times 75.0dyn/cm \times 1.0}{1.0g/cm^3 \times 980.0cm/s^2 \times 0.02cm} = 7.6\ cm$$

٢- عند غمر الأنبوب داخل الماء بالتدريج تتغير الزاوية من الصفر إلى 90.0° والتي عندها يصبح الارتفاع صفراً $(h = 0.0)$ وعليه فإن المطلوب هنا هو معرفة قيمة الزاوية عند الارتفاع $1.0cm$

$$\cos\theta = \frac{h_1 \rho g r}{2\gamma}$$

$$= \frac{1.0cm \times 1.0g/cm^3 \times 980cm/s^2 \times 0.02cm}{2 \times 75.odyn/cm} = 0.13$$

إذن

$$\theta = 82.5^0$$

مثال 1.18

لوحان متوازيان من الزجاج، وضعا رأسيا بحيث يلامس طرفاهما السفليان سطح سائل يبلل الزجاج وتوتره السطحي γ . إذا كانت المسافة بين اللوحين x. احسب الارتفاع الذي يصل إليه السائل.

الحل :

طول كل لوح يساوي L (الطول الملامس للسائل). أي أن طول خط التلامس مع السائل هو $2L$ ومنه فإن قوة الجذب إلى أعلى هي $F = 2L\gamma$ والتي تتزن مع عمود السائل بين اللوحين،

$F = W = mg = 2L\gamma$ لكن $m = \rho V = \rho Ah = \rho Lxh$

وبالتعويض عن m نحصل على الارتفاع الذي يصل إليه السائل.

$$h = \frac{2L\gamma}{\rho Lxg} = \frac{2\gamma}{\rho xg}$$

كم الارتفاع للسائل إذا كان $\gamma = 27.0dyn/cm, \rho = 1.37g/cm^3, x = 2.0mm$

$$h = \frac{2 \times 27.0dyn/cm}{1.37g/cm^3 \times 0.2cm \times 980cm/s^2} = 2.01mm$$

مثال 1.19

عيّن مقدار الفرق في ارتفاع السائل في أنبوبين شعريين موصولين أنصاف أقطارهما r_1 و r_2 ، علماً بأن زاوية التلامس تساوي الصفر شكل (1.13)

الحل :

في الشكل نلاحظ أن قوى التوتر السطحي هي:

$$T_1 = 2\pi\, r_1\gamma \quad \text{و} \quad T_2 = 2\pi\, r_2\gamma$$

إذا فرضنا أن W_1 و W_2 هما وزنا السائلين في الأنبوب الأول والأنبوب الثاني فإن صافي الوزن عند قاع كل أنبوب هو:

$$F_1 = W_1 - T_1 \quad \text{و} \quad F_2 = W_2 - T_2$$

ويقابلاهما الضغطان

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{W_1 - T_1}{A_1} = g\, h_1\, \rho - \frac{T_1}{A_1}$$

و

$$P_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{W_2 - T_2}{A_2} = g\, h_2\, \rho - \frac{T_2}{A_2}$$

حيث ρ هي كثافة السائل و A_1 و A_2 هما مساحتا مقطعي الأنبوبين.

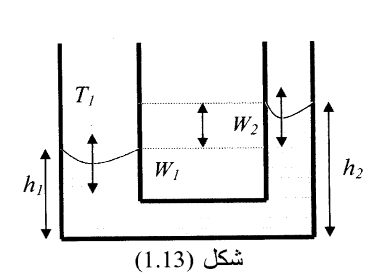
لكن P_1 و P_2 متساويتان

وهذا يجعل

$$gh_1\, \rho - \frac{T_1}{A_1} = gh_2\, \rho - \frac{T_2}{A_2}$$

أو

$$\rho\, g(h) = \frac{T_2}{A_2} - \frac{T_1}{A_1}$$



شكل (1.13)

$$\rho g(h) = \frac{2\pi r_2 \gamma}{\pi r_2^2} - \frac{2\pi r_1 \gamma}{\pi r_1^2}$$

$$= 2\gamma\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

وعليه فإن فرق الارتفاع هو:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{2\gamma(r_1 - r_2)}{\rho g r_1 r_2}$$

احسب h عند $\gamma = 75.0 dyn/cm, r_1 = 3.0 cm, r_2 = 2.0 cm$

$$h = \left(\frac{2 \times 75.0 \times 1.0}{1.0 \times 980.0 \times 2.0 \times 3.0}\right) cm \approx 0.25 mm$$

مسـائـل

1- أثرت ممرضة بقوة قدرها $50.0\ N$ على مكبس محقنة طبية نصف قطرها $1.2\ cm$. احسب الضغط الذي زاد على الدواء داخل المحقنة.

2- كرة كثافتها النسبية 8.9 ونصف قطر تكورها $5.0cm$. احسب كتلتها.

3- سيارة كتلتها $2500.0kg$ رفعت في ورشة بقوة $1500.0N$. ما النسبة بين نصفي قطري طرفي الرافعة ؟

4- احسب الضغط المطلق على عمق $5.0m$ داخل خزان للبنزين . احسبه على عمق $200.0m$ داخل المحيط .

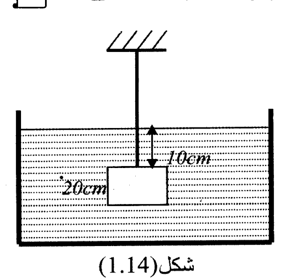
5- احسب الضغط اللازم لرفع الماء إلى سطح بناية ارتفاعها $250.0m$.

6- مكعب طول ضلعه $20.0cm$. ملئ ربعه بالماء ثم أضيف إليه طبقة من الزيت بارتفاع $2.0cm$ وبكثافة نسبية قدرها 0.6 . احسب الضغط المطلق عند قاع الإناء.

7- احسب الضغط الجوي في يوم كان ارتفاع البارومتر فيه $75.0cm$.

8- يصل أنبوب ماء بين الدورين الأرضي والسطح في عمارة . وكان الضغط للماء الساكن عند الدور الأرضي $5.6x10^5\ Pa$ وكان $2.0x10^5\ Pa$ عند السطح . احسب ارتفاع العمارة.

9- جسم مكعب طول حافته $20.0\ cm$ ووزنه في الهواء $100.0\ N$ علق بخيط داخل وعاء مفتوح به ماء كما بالشكل (1.14).



شكل(1.14)

أ – احسب القوة المؤثرة على السطح العلوي للجسم والناتجة عن الهواء والماء.

ب– احسب القوة الكلية الواقعة على أسفل الجسم.

ج– احسب الشد في الخيط .

10– احسب أقل مساحة لوجه قطعة من الثلج سمكها *0.5 m* تطفو على الماء ويمكن أن تحمل جسم وزنه *1200.0 N*.

11– قطعة من الخشب تطفو على الماء انغمر منها ثلث حجمها ، وعندما وضعت على الزيت انغمر *0.9* من حجمها . احسب كثافتي الزيت والخشب.

12- جسم كتلته *500.0 kg* وحجمه الداخلي المفرغ $4.0\ m^3$ ما نسبة ما انغمر منه إلى حجمه الكلي إذا طفا على الماء . إذا بدأ الماء يتسرب إلى داخل الجسم ويحل محل الهواء فاحسب حجم الجسم الداخلي الذي يشغله الماء ويجعله ينغمر.

13- ما مساحة وجه أصغر قطعة ثلج سمكها *0.4 m* والتي بالكاد تحمل إنسان كتلته *80.0 kg* ؟ الكثافة النسبية للثلج هي *0.917* وتطفو في ماء نقي .

14– في المانوميتر الموضح بالشكل (1.4a) كان $y_1 = 4.0\ cm$ و $y_2 = 10.0 cm$ وسائله هو الزئبق وكان الضغط الجوي يعادل واحد بار *one bar*.

أ– احسب الضغط المطلق في قاع الأنبوب وكذلك احسبه على بعد *5.0 cm* من الطرف المفتوح من الأنبوب.

ب– احسب الضغط المطلق للغاز داخل الوعاء.

ج- احسب الضغط المقاس للغاز .

15- إذا كان المتر المكعب من ماء البحر يزن $9940.0\ N$. احسب الضغط المطلق على عمق $1000.0\ m$.

16- باروميتر طول أنبوبته $0.5\ m$ ومساحة مقطعه $20.0\ cm^2$ يرتفع به الزئبق إلى $.4\ m$ حيث الجزء العلوي منه مفرغ . أُدخل أُكسجين إلى هذا الجزء لينخفض الزئبق إلى ارتفاع $0.3\ m$. احسب ضغط الأُكسجين داخل الجزء العلوي.

17- غُمرت أنبوبة شعرية نصف قطرها الداخلي $2.0\ mm$ في ماء توتره السطحي $70.0\,dyn/cm$. احسب ارتفاع الماء في الأنبوب علماً بأن زاوية التلامس تساوي الصفر . افرض أنا غمرنا الأنبوبة في الماء حتى لم يبق منها إلا واحد سم فوق سطح الماء . اشرح ما حصل للماء داخل الأنبوب .

18- أنبوبان شعريان أنصاف أقطارهما $0.5\ mm$ و $0.3mm$ وموصولان ببعضهما شكل (1.13) . بهما سائل كثافته $1.37\ g/cm^3$ و فرق الارتفاع بين السائل في الأنبوبين $5.0\ mm$ ومعامل التوتر السطحي له $30.0dyne/cm$. عين زاوية التلامس في الأنبوب الأصغر علماً بأنها تساوي نصف زاوية التلامس في الأنبوب الأكبر.

الباب الثاني

حركة السوائل

Fluid Dynamics



2.1 مقدمـــة

في الباب السابق اقتصرنا على دراسة السوائل الساكنة والتي سنجد لاحقاً أن دراستها هي حالة خاصة من دراسة السوائل المتحركة . والآن سنبدأ دراسة حركة السوائل ، وهنا لن ندرس حركة الجسيم الواحد كدالة في الزمن بل سندرس خصائص السائل عند كل نقطة كدالة في الزمن . وحيث إن حركة السوائل معقدة جداً فإنه يلزم وضع بعض القواعد المُبسِطة لهذه الدراسة ليكون لدينا ما يُعرف بالسائل المثالي والذي من دراسته نحصل على فهم مناسب للسائل الفعلي .

أما القواعد الخاصة بالسائل المثالي فهي :

1- السائل غير اللزج Nonviscous Fluid: وفيه نُهمل الاحتكاك الداخلي للجسيمات . أي جسم يتحرك داخل سائل أهملنا تأثير لزوجة السائل . فلا تقابله أي قوة لزوجة.

2-التدفق الهادي Steady Flow : وفيه نعتبر سرعة تدفق السائل ثابتة بالنسبة للزمن عند أي نقطة.

3- الكثافة الثابتة Constant Density : ويقصد بها أن الكثافة ثابتة بالنسبة للزمن .

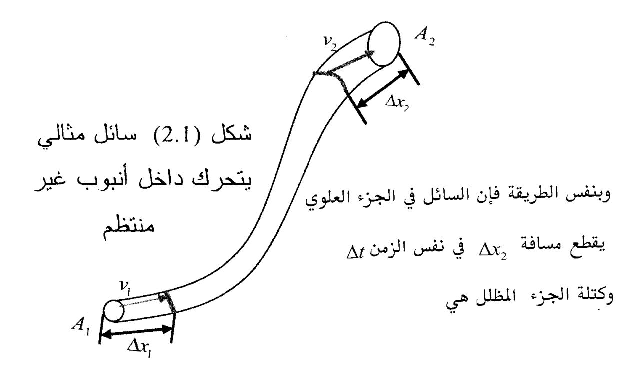
4- تدفق غير دوراني Nonturbulent Flow : يكون التدفق غير دوراني إذا لم يكن للسائل كمية حركة زاوية حول أي نقطة فيه، وهذا يتضح من وضع عجلة داخل السائل فإذا تحركت دون دوران كان التدفق غير دوراني .

2.2 طريق الانسياب ومعادلة الاستمرار

Streamlines and the continuity equation

يعرف طريق الانسياب لسائل مثالي بأنه المسار الذي ظله عند أي نقطة يـوازي متجه سرعة التيار وهي سـرعة ثابتـة لكامـل الجزيئـات والـتي لهـا طريـق انـسياب واحد، أما إذا تقاطع أكثر من مسار فإن التدفق لا يكون مثالياً ولاستنتاج معادلة المسار نأخذ سائلاً يتدفق في أنبوب غير منتظم كما بالشكل (2.1) ، وتنطبق عليـه الـشروط الأربعة أعلاه خلال زمن قـصير Δt نلاحـظ أن الـسائل قطـع مـسافة $\Delta x_1 = v_1 \; \Delta t$ فإذا كانت مساحة المقطع في هذه المنطقة هي A_1 فإن كتلة السائل عند A_1 هي:

$$\Delta m_1 = V_1 \; \rho_1 = \Delta x_1 \; A_1 \; \rho_1 = v_1 \; \Delta t \; A_1 \; \rho_1$$



شكل (2.1) سائل مثالي يتحرك داخل أنبوب غير منتظم

وبنفس الطريقة فإن السائل في الجزء العلوي يقطع مسافة Δx_2 في نفس الزمن Δt وكتلة الجزء المظلل هي

$$\Delta m_2 = V_2 \; \rho_2 = \Delta x_2 \; A_2 \; \rho_2 = v_2 \;\; \Delta t \; A_2 \rho_2$$

وحيث إن التدفق انسيابي فإن $\Delta m_1 = \Delta m_2$ ومنه فإن:

$$v_1 A_1 p_1 = v_2 A_2 P_2 \qquad (2.1)$$

وحيث إن السائل مثالي فإن $\rho_1 = \rho_2$ وعليه فإن:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{ثابت} \qquad (2.2)$$

وهذه هي معادلة الاستمرار The Continuity Equation والتي تعني أن :

حاصل ضرب المساحة والسرعة عند كافة النقاط على طول الأنبوب متساوية دائماً للسائل المثالي .

ومن المعادلة نرى أن مساحة المقطع عند نقطة تتناسب عكساً مع سرعة التدفق كما نرى أن لها وحدة حجم/زمن ولهذا يسمى vA بالتدفق الحجمي أو معدل التدفق ، ويمكن كتابته على الصورة التالية :

$$Q = \frac{A\,v\,t}{t} = \frac{V}{t} \qquad (2.3)$$

مثال 2.1

استخدم خرطوم مياه نصف قطر نهايته $5.0cm$ لملء خزان ماء سعته $3.6m^3$ إذا استغرق ذلك نصف ساعة ، فاحسب سرعة التدفق.

الحل :

مساحة مقطع الخرطوم

$$\pi r^2 = \pi (5.0cm)^2 = 25.0\,\pi\, cm^2$$

معدل التدفق للماء

$$Q=\frac{V}{t}=\frac{3.6\ m^3}{30.0\ \text{min}}=\frac{3.6\times(100.0)^3\ cm^3}{30.0\,\text{min}\times 60.0\ \text{sec/min}}=2000.0\ cm^3/\text{sec}$$

لكن

$$Q=vA$$

إذن :

$$v=\frac{2000.0\,cm^3/s}{25\ \pi\ cm^2}=25.5\ cm/s$$

مثال 2.2

يدخل الماء إلى منزل خلال أنبوب نصف قطره الداخلي *2.0cm* وبسرعة *200.0m/s* ليصعد إلى الدور الثاني بسرعة *300.0cm/s* . احسب نصف قطر الأنبوب في هذا الموقع.

الحل :

$$A_2=\frac{v_1\ \ A_1}{v_2}=\frac{(200.0\ cm/s)\times(\pi)\times(2.0\ cm)^2}{300.0\ cm/s}=\frac{8}{3}\ \pi\ cm^2$$

إذن :

$$A_2=\pi\ r_2^2=\frac{8}{3}\ \pi\ cm^2$$

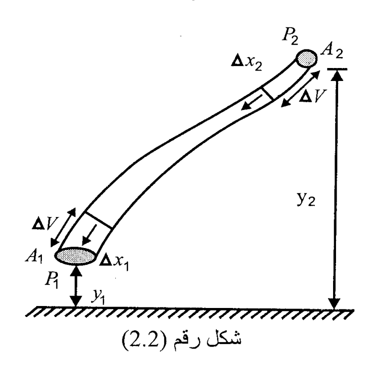
$$r_2=1.63\ cm$$

2.3 معادلة بيرنولي Bernoulli's Equation

لاحظنا في الفصل السابق أن السرعة تتغير بتغير مساحة مقطع الأنبوب ولحدوث ذلك فإن قوة التحريك تتغير كذلك أي أن الضغط متغير على طول الأنبوب، كذلك سنجد من خلال معادلة بيرنولي وجود ضغط إضافي إذا تغير ارتفاع الأنبوب، أما المعادلة التي نقوم باستنتاجها فهي معادلة عامة تربط بين فرق الضغط بين نقطتين في مسار السائل وكل من التغير في السرعة والارتفاع عندهما . وقد اشتقها العالم السويسري Daniel Bernoulli عام 1738.

اعتبر التدفق في جزء غير منتظم من الأنبوب كما بالشكل (2.2) وفي زمن قدره Δt . يؤثر على الجزء السفلي قوة قدرها $P_1 A_1$ وتصنع شغلاً.

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$$



شكل رقم (2.2)

حيث ΔV هو حجم الجزء السفلي المظلل ، وبنفس الأسلوب فإن الشغل عند الجزء العلوي وفي نفس الوقت Δt هو $W_2 = P_2 A_2 \Delta x_2 = P_2 \Delta V$ (الحجم

الذي مر من النقطة 1 في زمن Δt هو نفس الحجم للسائل الذي مر عند النقطة 2 في نفس الزمن . ونعطي الشغل W_2 إشارة سالبة لأن ضغط السائل عكس اتجاه الحركة . ولنحصل على صافي الشغل بين النقطتين $\Delta W = (P_1 - P_2)\Delta V$ هذا الشغل يوزع بين طاقة الحركة وطاقة الوضع للسائل واللذين يعطيان من المعادلتين .

$$\Delta K = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2 \qquad (2.4)$$

و

$$\Delta U = m\, g\, y_2 \; - m\, g\, y_1 \qquad (2.5)$$

حيث ΔK يمثل التغير في طاقة الحركة و ΔU يمثل التغير في طاقة الوضع و m هي كتلة السائل المار في الأنبوب في زمن Δt . ويمكننا الآن استعمال نظرية الشغل والطاقة الذي له الصيغة :

$$\Delta W = \Delta K + \Delta U \qquad (2.6)$$

والذي يعطي

$$(P_1 - P_2)\,\Delta V = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2 + m\, g\, y_2 - m\, g\, y_1 \qquad (2.7)$$

و حيث إن

$$m = \rho\, \Delta V$$

فإننا نحصل على :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y_2 - \rho\, g\, y_1 \qquad (2.8)$$

وبإعادة الترتيب نحصل على معادلة بيرنولي العامة للسائل المثالي :

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g y_1 = P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g y_2 \quad (2.9)$$

والتي عادة تكتب بالصيغة التالية:

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g y = \text{ثابت} \quad (2.10)$$

هذه المعادلة يُعبر عنها بما يلي :

مجموعة الضغط(P) وطاقة الحركة لكل وحدة حجم$\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ وطاقة الجهد لكل وحدة حجم $(\rho g y)$ لها قيمة ثابتة عند أي نقطة على طول مسار السائل.

وللتأكيد على أن دراسة السائل الساكن هي حالة خاصة من دراسة السائل المتحرك نضع :

$v_1 = v_2 = 0$

وعليه فإن المعادلة العامة تأخذ الصيغة التالية :

$$P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h \quad (2.11)$$

وهذه تتفق مع المعادلة (1.9).

مثال 2.3

عند نقطة من أنبوب ماء كان نصف قطر مقطعه $2.0\ cm$ وكان الضغط عندها $5.0\times10^5\ Pa$. وعند نقطة أخرى كان نصف قطر مقطعه $1.0\ cm$ وكانت هذه النقطة على ارتفاع $10.0\ m$ من النقطة الأُولى . إذا كانت السرعة عند النقطة الأُولى هي $4.0\ m/s$. فاحسب سرعة السائل والضغط عند النقطة الثانية.

الحل :

نحسب السرعة من معادلة الاستمرار

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{(4.0\ m/s)\times\pi(2.0cm)^2}{\pi(1.0cm)^2} = 4\ m/s \times 4 = 16\ m/s$$

ونحصل على الضغط من معادلة بيرنولي

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) - \rho\, g\left(y_2 - y_1\right)$$

$$= 5.0\times10^5 Pa - \left[\frac{1}{2}\times\left(1.0\times10^3\ kg/m^3\right)\times\left(256.0\ m^2/s^2 - 16.0\ m^2/s^2\right)\right]$$

$$-\left(1.0\times10^3\ kg/m^3\right)\times\left(9.8\ m/s^2\right)\times\left(10.0m\right) = 2.82\times10^5\ Pa$$

2.4 بعض التطبيقات على معادلة بيرنولي

Applications of Bernoulli's Equation

1- سرعة التدفق Speed of Efflux أو نظرية تورشلي Torricelli's Theorem

يمثل الشكل (2.3) خزان مغلق مساحة مقطعه A_1 وبه سائل كثافته ρ وعمقه y ، أما المنطقة فوق السائل ففيها هواء ضغطه P ويتدفق السائل من ثقب مساحته A_2 . نعتبر الخزان أنبوبة غير منتظمة سرعة السائل عند السطح v_1 وسرعة التدفق v_2 ، نلاحظ أن الضغط عند النقطة 2 هو الضغط الجوي Pa .

نطبق معادلة بيرنولي على النقطتين 1 و 2 لنحصل على :

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y = Pa + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 \qquad (2.12)$$

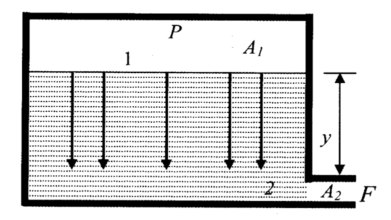
أو

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(P - Pa)}{\rho} + 2gy \qquad (2.13)$$

وبالتعويض من المعادلة (2.2) في المعادلة (2.13) نحصل على:

$$v_2^2 = v_2^2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + \frac{2\,(P - Pa)}{\rho} + 2\,g\,y \qquad (2.14)$$

ولنأخذ الآن حالة خاصة للمعادلة (2.13) وهي حالة الخزان المفتوح أي الحالة التي فيها $P = Pa$ لتصبح سرعة التدفق



شكل (2.3) خزان مليء بسائل كثافته ρ وعمقه y ومساحة مقطعه A_1 موصول بالخارج بالفتحة A_2 وضغطها Pa

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\,g\,y \tag{2.15}$$

وهي إحدى معادلات الحركة .

إذا كان الخزان كبيراً بحيث تكون $A_1 >> A_2$ فإن v_1 تصبح صغيرة جداً بالنسبة إلى v_2 مما يمكن من إهمالها لتصبح المعادلة على الصورة التالية :

$$v_2 = \sqrt{2\,g\,y} \tag{2.16}$$

أي أن سرعة التدفق هي نفس سرعة جسم يسقط سقوطاً حراً . وهذه هي معادلة تورشيلي .

نعود مرة أخرى إلى المعادلة (2.13) ونأخذ حالة الخزان المغلق المتسع والذي فيه $v_1^2 + 2\,g\,h$ << $\frac{2\,(P - Pa)}{\rho}$ لنحصل على صيغة تقريبية لسرعة التدفق وهي:

$$v_2 = \sqrt{2\,(P - Pa)/\rho} \tag{2.17}$$

نلاحظ أنه إذا كان الضغط عالياً أو الكثافة صغيرة (غاز مضغوط داخل الخزان) فإن سرعة التدفق تكون عالية وقد تصل حالة التدفق إلى الاضطراب مما يجعل نموذج السائل المثالي غير مناسب.

قـــوة الـــــدفـــع The Reaction force

إن تدفق السائل من الأنبوب يحدث قوة دفع للسائل ويمكن استخدام معادلة بيرنولي لحساب هذه القوة فإذا كان A هو مساحة مقطع الأنبوبة و ρ هو كثافة السائل و v هو سرعة التدفق فإن كتلة السائل المتدفق في زمن Δt هي $\rho\, A\, v\, \Delta t$ وكمية حركته (الكتلة × السرعة) هي $\rho\, A\, v^2\, \Delta t$ أما معدل تغير كمية الحركة بالنسبة للزمن فهو $\rho A v^2$. وهذه هي قوة الدفع المطلوبة فإذا أخذنا الصيغة المقربة الأخيرة للسرعة فإن القوة تعطى بالمعادلة :

$$F = \rho\, A\, v^2 = \rho\, A\, \frac{2\,(P - Pa)}{\rho} = 2\, A\, \left(P - Pa\right) \qquad (2.18)$$

ومنها نلاحظ أن قوة الدفع لا تعتمد إطلاقاً على الكثافة بينما سرعة التدفق تتناسب عكساً مع مقلوب جذرها .

2- أنبوبة فنشوري The Venturi Tube

أنبوبة أفقية تضيق بالتدريج لتصل إلى عنق تتسع بعده بالتدريج كذلك ، كما يوجد بها فتحتان علويتان قبل العنق وبعده لمنع اضطراب السائل أثناء حركته كما بالشكل (2.4) وبتطبيق قاعدة بيرنولي على الأنبوب تصبح بالصيغة التالية :

$$P_1 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 \qquad (2.19)$$

من معادلة الاستمرار نلاحظ أن السرعة v_2 أكبر من السرعة v_1 وعليه فإن الضغط P_2 عند العنق أقل من الضغط P_1 ، وبالتعويض عن v_1 في المعادلة أعلاه

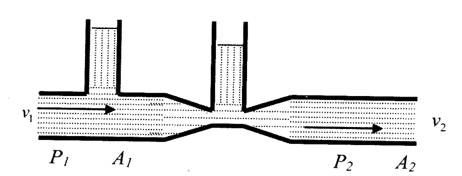
نحصل على السرعة v_2 بالصيغة التالية :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

وبإعادة الترتيب نحصل على v_2 بالصيغة :

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}} \qquad (2.20)$$

ويمكن الحصول على صيغة للسرعة v_1 بدلالة هذه المعادلة ومعادلة الاستمرار.



شكل (2.4) أنبوبة فنشوري

3- قياس الضغط داخل سائل متحرك

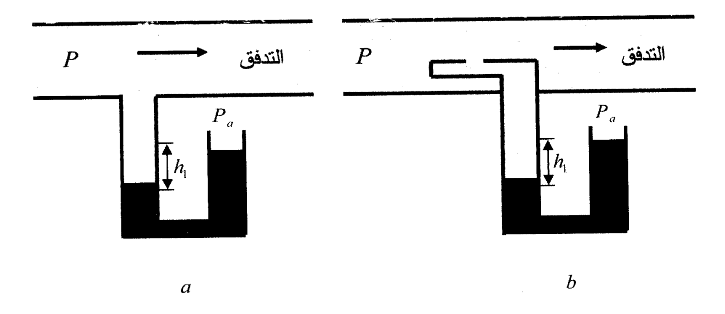
Measurement of Pressure in A moving Fluid

يمكن قياس الضغط P داخل سائل متحرك في أنبوب مغلق بإحدى طريقتين كما في الشكل(2.5) . في الشكل (2.5a) وصل طرف المانوميتر بفتحة في الأنبوب وفي الشكل(2.5b) أُدخل مسبر إلى داخل السائل ويلاحظ أن يكون المسبر دقيقاً حتى لا يُعطل حركة السائل أو يسبب اضطرابه ، وفي هذه الحالة فإن الفرق في الارتفاع h داخل المانوميتر يتناسب مع الفرق بين الضغط الجوي والضغط داخل السائل أي أن :

$$P = \rho_H\, g\, h_1 + Pa \qquad (2.21)$$

حيث ρ_H هي كثافة السائل داخل المانوميتر ومنها فإن:

$$Pa = P - \rho_H \; g \; h_1$$



شكل (2.5) قياس الضغط P داخل السائل المتدفق

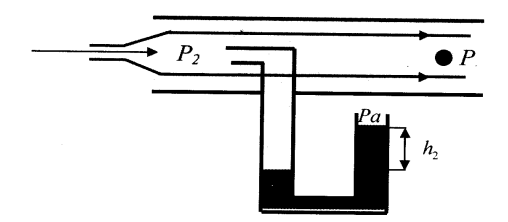
4- أنبوبة بايوت Piotot Tube

مسبر طرفه العلوي مفتوح داخل السائل الذي سرعته عندها صفراً و ضغطه P_2 ، نطبق قاعدة بيرنولي على نقطة الركود وعلى نقطة أخرى بعيدة عن المسبر وفي مكان ضغطه P وسرعة السائل v .

ومنه نحصل على التالي :

$$P_2 = P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 \qquad (2.22)$$

أي أن الضغط عند نقطة الركود يساوي الضغط المتحرك $\frac{1}{2}\rho\, v^2$ مضافاً إليه الضغط الساكن P .



شكل (2.6) أنبوبة بايوت

وبدلالة الضغط الجوي فإن الضغط عند النقطه P هو:

$$P = Pa + \rho_h gh - \frac{1}{2}\rho v^2$$

حيث ρ_h هي كثافة السائل في المانوميتر.

مثال 2.4

ملئ برميل حجمه $1.0m^3$ بالماء ورفع عن سطح الأرض مسافة $2.0m$. فتح في قاعه ثقب قطره $2.0cm$ لينسكب الماء في زمن قدره $20.0min$. احسب سرعة الماء ومساحة مقطعه عند سطح الأرض .

الحل:

نعلم أن $Av = \frac{V}{t}$ ومنها فإن $v = \frac{V}{At}$

لكن

$$A = \pi r^2 = \pi \ cm^2$$

إذن:

$$v_1 = \left(\frac{1.0 m^3}{3.14 \times 10^{-4} m^2 \times 20 \min x 60 \sec/\min} \right) = 2.65\ m/s$$

وتمثل سرعة التدفق من البرميل .

وبتقريب السرعة على بعد y من قاع البرميل بالمعادلة :

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gy$$

إذن :

$$v_2^2 = (2.65\, m/s)^2 + 2x9.8\ m/s^2 x\ 2.0m = 46.24 m^2/s^2$$

ومنها فإن:

$$v_2 \cong 6.8 m/s$$

وتمثل سرعة الماء عند وصوله سطح الأرض . من معادلة الاستمرار لدينا

$$A_2 = \frac{A_1 v_1}{v_2} = 1.22\ cm^2$$

وتمثل مساحة مقطعه عند سطح الأرض.

مثال 2.5

أنبوب أفقي غير منتظم ، يُنقل به الماء . عند نقطتين داخل الأنبوب كانت أنصاف الأقطار *2.0cm* و *1.0cm* وفرق الضغط بين النقطتين هو *5.0cm* من الماء . احسب كمية الماء المتدفق من الأنبوب في نصف ساعة .

الحل :

نستخدم معادلة بيرلوني بالصيغة

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^{2)})$$

لكن

$$P_1 - P_2 = \rho g h = (1000.0\ x\ 9.8\ x\ 0.05)\ Pa$$

وأيضاً

$$v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1} = \frac{\pi x 1.0^2}{\pi x 2.0^2} v_2 = 0.25 v_2$$

إذن

$$v_2^2 (1 - 0.0625) = \frac{2x490}{1000} m^2 / s^2$$

ومنها فإن السرعة

$$v_2 = 1.00224 m / s$$

وبالتعويض فإن كمية الماء المتدفق هي:

$$V = v_2 A_2 t = (1.0224 x \pi x (0.01)^2 x 30 x 60) m^3 = 0.514 m^3$$

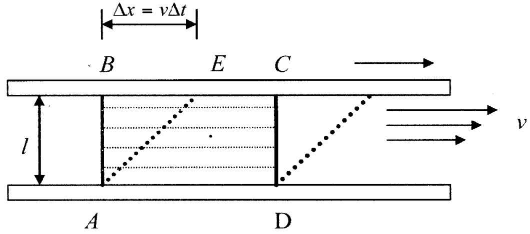
2.5 اللزوجة Viscosity

يلاحظ عند دراسة الإجهاد القصي (والذي سوف يرد مفصلاً في الباب الثالث) اقتصاره على المادة الصلبة دون السائلة إلا إنه في حالة حركة السائل والنظر إليه كطبقات متوازية فإنه ينشأ مقاومة قصية بين هذه الطبقات ، وهذه المقاومة هي شكل من أشكال المقاومة الداخلية والتي تسمى باللزوجة.

أي أن اللزوجة في السوائل تنشأ بسبب قوى الاحتكاك بين طبقات السائل المتلامسة وبسرعات مختلفة.

ولنضرب مثالاً توضيحياً :

لنأخذ لوحين من الزجاج وبينهما زيت نثبت أحد اللوحين ونحرك الآخر نجد سهولة حركة اللوح الحر ثم نكرر العملية بوضع قطران محل الزيت ونحرك اللوح الحر نجد أن الحركة أبطأ منها مع الزيت وعليه نقول إن القطران أكثر لزوجة من الزيت. يبين الشكل (2.7) أن السرعة لطبقات السائل تزداد من الصفر عند اللوح الثابت إلى v بملامسة اللوح المتحرك ولاستنتاج صيغة معامل اللزوجة نعود إلى استنتاج معامل المرونة القصي ونلاحظ وجود طبقتين من السائل متوازيتين إحداهما ساكنة والأخرى متحركة ونؤثر على الساكنة بإجهاد قصي



شكل (2.7) طبقة من الزيت بين لوحين أحدهما ثابت والسرعة عنده صفر والآخر متحرك إلى اليمين وبسرعة v

وبانفعال قصي :

$$\text{Shear strain} = \frac{\Delta x}{l} \qquad \text{و} \qquad \text{Shear stress} = \frac{F}{A}$$

وحيث إن اللوح العلوي يتحرك بسرعة v فإن السائل الملامس له يتحرك بنفس السرعة وذلك في زمن قدره Δt ليكون $\Delta x = v\Delta t$ ، وعليه يمكن التعبير عن الانفعال القصي لكل وحدة زمن بالصيغة :

$$\frac{shear\ strain}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x}{l}}{\Delta t} = \frac{v}{l} \tag{2.23}$$

وعليه فإن معامل اللزوجة للسائل η يُعرف بأنه النسبة بين الإجهاد القصي ومعدل تغير الانفعال القصي

$$\eta = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{v}{l}} = \frac{F\,l}{v\,A} \tag{2.24}$$

أو

$$F = \eta A \frac{v}{l}$$

نلاحظ في هذه المعادلة أن القوة تتناسب مع السرعة إلا أن هذه المعادلة لا تنطبق على كل السوائل ومنها الدم الذي وجد أن سرعته أكثر تزايداً من القوة، أما السوائل التي ينطبق عليها هذا القانون فتدعى سوائل نيوتن.

الوحدة الدولية للزوجة هي $N.s/m^2$ ، ويقابلها في وحدات (cgs) $dyn.s/cm^2$ وهي الوحدة الشائعة الاستعمال وتدعى البواز *poise* وعليه فإن:

$$one\ poise = 1\ dyn.s/cm^2 = 10^{-1} N.s/m^2$$

وفي حالة القيم الصغيرة فإنه يمكن استخدام السنتيبواز (cp) أو الميكروبواز $(1\mu p = 10^{-6} poise)$ ، ويعطي الجدول (2.1) قيم اللزوجة لثلاث مواد موضحة مع قيم مختلفة لدرجات الحرارة.

جدول (2.1) قيم اللزوجة للهواء والماء وزيت الخروع

η للهواء μp	η لزيت الخروع $poise$	η للماء cp	درجة الحرارة C^0
171	53	1.792	0
181	9.86	1.005	20
190	2.31	0.656	40
200	0.80	0.469	60
209	0.30	0.357	80
218	0.17	0.284	100

مثال 2.6

رُبطت صفيحة معدنية مساحتها $0.05\ m^2$ بجسم كتلته $8.0g$ وذلك بخيط يمر على بكرة مثالية (ملساء ومهملة الكتلة) شكل (2.8) ، وُضعت طبقة شحمية بين الصفيحة والسطح بسمك $0.3mm$ ، عندما تركت المجموعة لتتحرك سارت بسُرعة ثابتة قدرها $0.085\ m/s$. احسب معامل اللزوجة للمادة الشحمية.

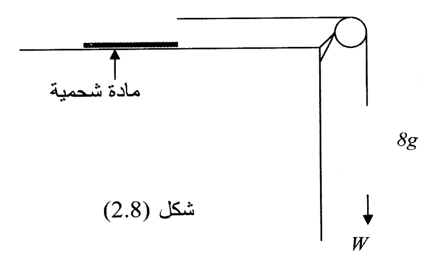
الحل :

حيث إن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة فإن تسارعه يساوي الصفر ويتحرك تحت تأثير وزن الجسم المدلى

$$F = W = mg = \left(8\times10^{-3} kg\right)\times\left(9.80\ m/s^2\right) = 7.84\times10^{-2}\ N$$

الجزء من الطبقة الشحمية الملامس للسطح الأفقي ساكن والجزء الملامس للصفيحة يتحرك بنفس سرعتها وبالتعويض في معادلة معامل اللزوجة فإن:

$$\eta = \frac{F\,l}{A\,v} = \frac{(7.84\times10^{-2}\,N)\times(0.3\times10^{-3}\,m)}{(0.05\,m^2)\times(0.085\,m/s)} = 5.53\times10^{-3}\ N.s/m^2$$



شكل (2.8)

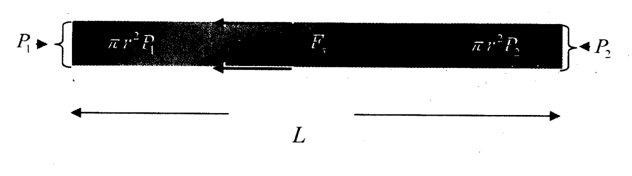
2.6 قانون بوازوي Poiseuille`s Law

عند تحرك سائل لزج داخل أنبوب فإنه يسير بسرعات مختلفة يكون أقلها سرعة الجزء الملامس لسطح الأنبوب وقد يصل إلى الصفر في حالة السرعات غير العالية للسائل بينما تكون أعلى سرعة على محور الأنبوب. وهنا يمكن تخيل السائل على شكل طبقات لكل منها سرعتها ، وهذه السرعات تزيد بالابتعاد عن الجدران .

والآن ندرس تغير سرعة السائل بتغير نصف القطر الداخلي للأنبوب الأسطواني المار به ، نأخذ أسطوانة من السائل نصف قطرها r وتؤثر عليها القوتان $\pi r^2 P_1$ و $\pi r^2 P_2$ ومحصلتهما في اتجاه حركة السائل F

$$F = \pi r^2 (P_1 - P_2) \tag{2.25}$$

وحيث إن حركة السائل ثابتة فإن التسارع معدوم وعليه فإن هذه القوة تعادل قوة اللزوجة بين طبقات السائل انظر الشكل (2.9) والذي فيه F_s تمثل قوى اللزوجة والتي تعطى بالمعادلة (2.24)



شكل (2.9)

وحيث إن السرعة لا تتغير بانتظام مع الابتعاد عن المحور فإننا نستعيض عن $\frac{v}{l}$ بالتفاضل $\frac{dv}{dr}$ لتصبح المعادلة :

$$F_s = 2\pi rL\eta \frac{dv}{dr} \tag{2.26}$$

حيث $2\pi r\ L$ هي مساحة جزء من الأنبوب نصف قطره r .

وبمساواة المعادلتين (2.25) و (2.26) نجد أن (لاحظ اتجاه القوتين)

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$

وهذه معادلة توضح أن السرعة تتغير مع زيادة نصف القطر أما الإشارة السالبة فتوضح أنه بزيادة r تنقص v وحيث إن حدود r هي $r = 0$ و $r = R$ فإنه بالتكامل نحصل على:

$$-\int_v^0 dv = \frac{P_1 - P_2}{2\ \eta L}\int_r^R r\ dr$$

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\ \eta L}\left(R^2 - r^2\right) \tag{2.27}$$

وهذا يعني أن الس[illegible] [illegible] [illegible]ـمه كبرى قدرها $\frac{P_1 - P_2}{4\eta L}R^2$ عند المركز إلي الصفر عند ملامسة الأنبوب أي أن:

$$v_{max} = DR^2 \tag{2.28}$$

أي أنه عند المركز تتناسب السرعة الكبرى مع مربع نصف قطر الأنبوب:

$$D = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}$$

والآن نأخذ شريحة أسطوانية داخل السائل نصف قطرها الداخلي r ونصف قطرها الخارجي $r + \Delta r$ انظر الشكل (2.10) ، و حجم السائل المار بهذه الشريحة في زمن dt هو $vdtdA$ حيث v هي السرعة عند نصف القطر r و dA

هي مساحة الوجه المظلل $dA = 2\pi r dr$ وبالتعويض عن قيمة السرعة من المعادلة (2.27) فإن:

$$dV = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)2\,\pi r dr dt$$

ومنها نحصل على حجم السائل الذي يعبر

مقطع محدد وذلك بالتكامل لهذه المعادلة

من $r = 0$ إلى $r = R$.



$$V_1 = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L}t \qquad (2.29)$$

أما معدل تدفق الحجم بالنسبة للزمن فيعطى بالمعادلة

$$Q = \frac{V_1}{t} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L} \qquad (2.30)$$

شكل (2.10)

وهذه المعادلة اشتقها بوازوي Poiseuille وتعرف بقانون بوازوي ومنه يظهر التناسب العكسي بين اللزوجة ومعدل التدفق الحجمي كما هو متوقع.

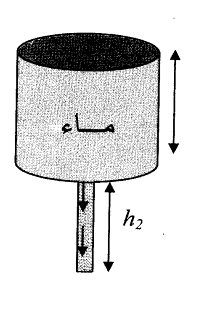
مثال 2.7

أسطوانة نصف قطر قاعدتها $5.0cm$ و ارتفاعها $30.0cm$ وموصل بقاعدتها أسطوانة شعرية نصف قطرها $0.5mm$ وطولها $40.0cm$ شكل(2.11) .

قارن بين سرعة تدفق الماء الخارج من الأنبوب الشعري في حال كانت الأسطوانة الكبرى مليئة بالماء وبين سرعة تدفق الماء إذا أصبحت الأسطوانة الكبرى فارغة علماً بأن معامل اللزوجة $0.01\ poise$.

الحل:

يتدفق الماء في الأنبوب الشعري نتيجة ضغط الماء في الأسطوانة وكذلك ضغط الماء داخله وعليه فإن معدل تدفق الماء في حالة امتلاء الأسطوانة هو:



$$Q = \frac{V_1}{t} + \frac{V_2}{t} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta h_2}\left(\Delta P_1 + \Delta P_2\right)$$

حيث ΔP_1 هو الضغط من عمود سائل ارتفاعه h_1 أي أن $\Delta P_1 = \rho g h_1$ و ΔP_2 هو الضغط من عمود السائل داخل الأنبوب الشعري $\Delta P_2 = \rho g h_2$.

معدل التدفق Q بسبب هبوط مستوى الماء في أسطوانة ارتفاعها h يعطى كذلك بالصيغة

$$Q = \frac{hA}{t} = Av$$

ومنه فإن:

$$v_1 = \frac{h}{t} = \frac{\pi}{8A}\frac{R^4}{\eta h_2}\left(h_1 + h_2\right)\rho g$$

في حالة الامتلاء يكون:

$h_2 = 40.0cm$ و $h_1 = 30.0cm$

$$v_1 = \frac{\pi \times \left(0.5 \times 10^{-3}\right)^4 \times 1000.0 \times 0.7 \times 9.8}{8 \times \left(2\pi \times 0.05 \times 0.3\right) \times 10^{-3} \times 0.4} \quad m/s$$

$$= 4.47 \times 10^{-6}\, m/s = 1.61\, cm/hr$$

وفي حال كانت الإسطوانة فارغة فإن $h_1 = 0$

ويعوض أعلاه لتصبح السرعة:

$$v_2 = \frac{h'}{t} = \frac{\pi R^4}{8A\eta}\rho g = 1.61\ cm/hr \times \frac{0.4}{0.7} = 0.92\ cm/hr$$

2.7 قانون ستوك Stoke`s Law

عند تحرك جسم رأسياً داخل سائل لزج فإن القوى المؤثرة عليه هي وزنه وله اتجاه حركة الجسم ، ورد فعل السائل أو ما قد يعرف بقوى الطفو وكذلك القوى المعتمدة على لزوجة السائل وهاتان القوتان لهما اتجاه عكس اتجاه القوة الأولى ، بعد مرور بعض الوقت على حركة الجسم تصبح سرعته ثابتة وهنا تكون محصلة القوى الثلاث تساوي الصفر. ولمعرفة هذه السرعة نفرض أن الجسم كروي ووزنه $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ حيث r نصف قطر الكرة و ρ كثافة مادتها كذلك فإن وزن السائل المزاح هو $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g$ حيث ρ_1 هي كثافة السائل . أما القوة المعتمدة على اللزوجة فمن الواضح أنها تعتمد على اللزوجة η وعلى سرعة الكرة v وكذلك على نصف قطر الكرة وقد عُرِّفت هذه القوى على الصورة

$$F_v = 6\pi\eta r v \tag{2.31}$$

مما تقدم نجد أن :

$$6\pi\eta r v_f + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

ومنها نجد أن :

$$v_f = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_1) \tag{2.32}$$

حيث v_f هي السرعة النهائية .

وهذه المعادلة مفيدة لحساب اللزوجة للسوائل في حال معرفة مادة الكرة ونصف قطرها وسرعتها النهائية .

مثال 2.8

قطرة زيت تحمل شحنة قدرها $100\,e$ ، حيث e هي شحنة الإلكترون ، ونصف قطرها $10\mu m$. احسب سرعتها النهائية إذا سقطت بين لوحين أفقيين فرق الجهد بينهما $1500.0V$ والمسافة بينهما $2.0cm$. علماً أن كثافتي الزيت والهواء على التوالي هما $800.0 kg/m^3$ و $1.29 kg/m^3$ ولزوجة الهواء $1.8\times10^{-5}\,N.s/m^2$.

الحل :

حيث إن القطرة تحمل شحنة سالبة فإنه يلزم أن يكون اللوح العلوي موجباً وعليه فإن لدينا أربع قوى تؤثر على القطرة هي وزنها إلى أسفل أما القوى الأخرى وهي الكهربية ولها القيمة $F_e = qe\,V/d$ وممانعة الهواء ولها القيمة $\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1$ وقوة اللزوجة وبجمع القوى فإن:

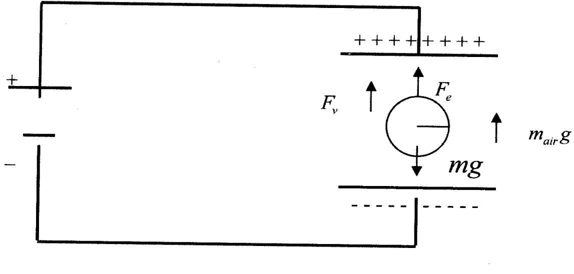
$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g + 6\pi\eta r v + \frac{qeV}{d}$$

ومنها فإن:

$$v_f = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho-\rho_1) - qeV/d}{6\pi\,\eta\,r}$$

$$v_f = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi(10\times10^{-6})^3\times9.8(800-1.29) - 100\times1.6\times\times10^{-19}\times1500/0.02}{6.\pi\times1.8\times10^{-5}\times10\times10^{-6}}\right) m/s$$

$$= \frac{3.2787\times10^{-11} - 1.2\times10^{-12}}{3.393\times10^{-9}} = 9.31\times10^{-3}\ m/s$$



شكل(2.12)

مثال 2.9

كرتان نصف قطر الأولى r ونصف قطر الثانية $2r$ ومن مادة واحدة كثافتها $8.0\ g/cm^3$ غُمرتا في وعاء به ماء لتصل الأُولى القاع في زمن قدره ثانية واحدة . احسب سرعتي الكرتين النهائيتين ونصف قطريهما ، علماً بأن عمق الماء $1.5m$.

الحل :

لدينا من المعادلة الأُولى السرعتان للكرتين

$$v_1 = \frac{2r^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_1)$$

$$v_2 = \frac{8r^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_1)$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad v_2 = 4v_1$$

أي أن سرعة الكرة الكبرى أربعة أضعاف سرعة الكرة الصغرى ومن معادلة الحركة $x = vt$ نجد أن:

$v_1 = 1.5 m/s$ و $v_2 = 6.0\ m/s$

وبالتعويض عن السرعة في إحدى المعادلتين نجد أن:

$$9.0 \times 1.5\eta = 2r^2 \times 9.8 m/s^2 \times 7 \times 10^3 kg/m^3$$

وبأخذ $\eta = 10^{-3}\ N.s/m^2$ عند درجة حرارة $20.0^0 C$ فإن:

$r_1 = 3.14 \times 10^{-4} m$ ويمثل نصف قطر الكرة الأولى ومنه يكون $r_2 = 6.27 \times 10^{-4} m$ ويمثل نصف قطر الكرة الثانية.

2.8 الاضطراب في السوائل المتحركة وعدد رينولدز

Turbulent in Fluids and Reynold's Number

إذا زادت سرعة سائل متحرك خطياً عن حد معين يسمى السرعة الحرجة للسائل فإنه تنشأ مركبة عمودية لحركة السائل ، وتسبب هذه المركبة في حركة دوامية في السائل تمتص جزءاً من طاقة حركته . وقد وجد تجريبياً أن السرعة الحرجة v_c تعتمد على كل من لزوجة السائل η وكثافته ρ وكذلك على قطر الأنبوب D ، ولتحديد شكل العلاقة فإنا نكتبها بالصيغة :

$$v_c = N_R\ \eta^{\gamma}\ \rho^{\beta}\ D^{\alpha}$$

حيث N_R ثابت و α , β , γ ثوابت نحددها من معادلة التناسب البعدية حيث :

$$m.s^{-1} = \left(kg.m^{-1}.s^{-1}\right)^{\gamma}\left(kg.m^{-3}\right)^{\beta}\left(m\right)^{\alpha}$$

إذن

$$1.0 = kg^{\gamma+\beta}, \quad m = m^{-\gamma-3\beta+\alpha}, s^{-1} = s^{-\gamma}$$

أي أن :

$$\gamma + \beta = 0 \qquad و \qquad \gamma = 1$$

و

$$1 = -\gamma - 3\beta + \alpha$$

ومنها نجد أن :

$$\gamma = 1 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \alpha = -1$$

أي أن :

$$v_c = \frac{N_R\ \eta}{\rho\ D} \tag{2.34}$$

ويسمى الثابت N_R عدد رينولد نسبة إلى Reynold .

وقد أكدت مجموعة من التجارب أنه إذا كانت قيمة N_R أقل من 2000.0 فإن السائل يكون انسيابياً Laminar وتكاد تنعدم المركبة العمودية لحركة السائل أما إذا زاد هذا العدد عن 3000.0 فإن السائل يكون مضطربا Turbulent . أما منطقة الانتقال وهي بين 2000 و 3000 فإن السائل يكون غير مستقر ويمكن أن ينتقل من حالة الانسياب إلى حالة الاضطراب أو العكس .

مثال 2.10

يتحرك سائل داخل أنبوب. إذا كانت كثافته $880.0 kg/cm^3$ ولزوجته $0.3P$ وسرعته $200.0 cm/s$ ونصف قطر الأنبوب $1.0cm$ فعين نوع حركة السائل.

الحل:

بالتعويض في المعادلة $N_R = \frac{v_c \rho D}{\eta}$ فإن:

$$N_R = \frac{(200 cm/s) \times 0.88 g/cm^3 \times 2.0 cm}{0.3P} = 1173.3$$

وهذا يعني انسياب حركته Laminar

مثال 2.11

عين السرعة الحرجة للماء إذا تحرك في أنبوب قطره $1.0cm$ وذلك عند درجة حرارة $20.0^\circ C$.

الحل :

لدينا $N_R = 2000.0$ و $\rho = 1000.0 kg/m^3$ و $\eta = 0.1 N.s/m^2$

وحيث إن :

$$\frac{\rho\, v_c\, D}{\eta} < 2000.0$$

إذن

$$v_c \leq \frac{2000.0 \times 0.001 N.s.m^{-2}}{10.0^3\ kg/m^3.10.0^{-2}m} \quad m/s$$

$$= 0.2\ m/s = 20\ cm/s$$

أما إذا سار الماء وعند نفس درجة الحرارة بسرعة *30.0cm/s* فإن الحركة تكون مضطربة.

مثال 2.12

إذا سار الهواء بسرعة *30.0 cm/s* وفي نفس الأنبوب في المثال أعلاه وتحت نفس درجة الحرارة ، فاحسب ثابت رينولد.

الحل :

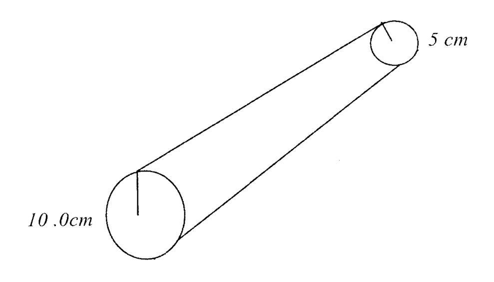
$$N_R = \frac{(1.29\ kg/m^3)(0.3m/s)(0.01m)}{1.81\times10^{-5} N.s.m^{-2}} = 215$$

وعليه فإن الهواء ينساب دون اضطراب حتى تصل N_R للهواء إلى *30000* فإنه يلزم أن تصل سرعة الهواء إلى حوالي *400.0cm/s*.

مســـائل

1- عند نقطتين من أنبوب أفقي كانت أنصاف الأقطار له $2.0\ cm$ و $3.0cm$ ، وكان فرق الضغط لماء يمر في الأنبوب بين هاتين النقطتين هو $500.0\ Pa$. احسب كمية الماء المتدفق عبر الأنبوب في الثانية الواحدة.

2- ينساب الماء داخل أنبوب مائل كما بالشكل بمعدل $10.0m^3/min$. عند المقطع الذي نصف قطره $10.0cm$ كان الضغط $1.2\times10^6 Pa$. احسب الضغط عند المقطع الذي نصف قطره $5.0cm$ ،علماً بأنه أعلى من المقطع الأول بمقدار $40.0cm$.



3- يندفع الماء من أعلى إلى خزان كبير بمعدل $0.4\ m^3/hr$ ولكنه يخرج من فتحة بقاع الخزان مساحتها $2.0cm^2$. احسب ارتفاع الماء في الخزان وذلك في حالة تساوي معدلي التدفق من وإلي الخزان.

4- يوجد ثقب دائري قطره $2.0cm$ ويبعد $10.0cm$ عن سطح الماء في أنبوب مفتوح وواقف .

أ- أحسب سرعة التدفق من الفتحة.

ب- حجم الماء المتدفق في الثانية.

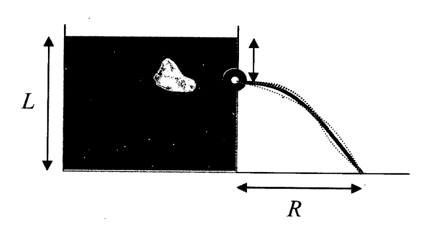
5- خزان ماء يقع على أرض مستوية وفتح به فتحتان يقعان على خط رأسي واحد. إحداهما تبعد $20.0cm$ و الأخرى $30.0\ cm$ عن الأرض. ما مقدار ارتفاع الماء في الخزان عندما يصل الماء الخارج من الفتحتين إلى نقطة واحدة.

6- خزان ذو مساحة كبيرة مليء بالماء وبارتفاع $0.5m$ ، يوجد في قاعه فتحة مساحتها $5cm^2$ تسمح بخروج الماء بانسياب .

أ- احسب معدل تدفق الماء من الفتحة بوحدة m^3/s .

ب-على أي بعد من قاع الخزان تكون مساحة مقطع الماء المتدفق تساوي نصف مساحة الفتحة.

7- خزان كبير ومفتوح ارتفاع مائه L .فتح ثقب على بعد h من سطح ماء الخزان . احسب المسافة R بين قاع الخزان ونقطة وصول الماء على الأرض.



8- عند نقطة في أنبوب أفقي كانت سرعة الماء $2.0 m/s$ وكان الضغط يزيد عن الضغط الجوي بمقدار $2.0\times10^{4} Pa$. احسب الضغط على نفس الخط عندما يضيق الأنبوب لتصبح مساحته تعادل ربع مساحته عند النقطة الأولى.

9- ما الضغط داخل خط الماء العام الذي يجعل الماء يرتفع رأسياً $15.0\ m$ عند فتح وصل خرطوم طوارئ به.

10- يتدفق الماء في أنبوب أفقي وعند نقطة أولى كانت مساحة المقطع $5.0 cm^2$ وعند نقطة أُخرى كانت المساحة $15.0\ cm^2$ وكان فرق الضغط بين النقطتين $1.0\times10^{3} Pa$. احسب عدد الأمتار المكعبة الخارجة من الأنبوب في ساعة.

11- عند نقطة في أنبوب أفقي كان الضغط المقاس $(P- Pa)$ هو $0.4\times10^{5}\ Pa$ وعند نقطة أخرى كان الضغط المقاس $0.2\times10^{5}\ Pa$. إذا كانت المساحتان عند النقطتين على التوالي هما $15.0\ cm^2$ و $7.5\ cm^2$. احسب عدد الأمتار المكعبة المارة من أحد المقطعين في الدقيقة.

12- يتدفق الماء في أنبوب أفقي بمعدل $0.4 m^3/hr$. عند نقطة من الأنبوب كان الضغط المطلق $2.0\times10^{5}\ Pa$ وكانت المساحة $10.0 cm^2$. احسب مساحة المقطع عند نقطة أخرى يكون عندها الضغط المطلق $1.5\times10^{5}\ Pa$.

13- يسير الماء في أنبوب نصف قطره $2.0 cm$ وكانت سرعته عند محور الأنبوب $8.0\ cm/s$. احسب فرق الضغط بين نقطتين في الأنبوب المسافة بينهما $1.5\ m$ علماً بأن درجة الحرارة $20.0^{0}C$.

14- سقطت كرة من النحاس نصف قطرها $1.0\ cm$ في الماء وكانت درجة الحرارة 20.0^0C .احسب سرعتها النهائية.

15- عين سرعة كرة نصف قطرها $2.0mm$ عند تحركها رأسياً داخل جليسرين في اللحظة التي لها تسارع يساوي نصف تسارع الجسم الحر.

عين سرعتها النهائية إذا كانت كثافة الكرة $8.5g/cm2$ و كثافة الجليسرين $.1.32g/cm$

16- فقاعة نصف قطر تكورها $1.0mm$ و ترتفع في سائل لزوجته $170.0\ cp$ وكثافته $0.95\ g/cm3$

أ- احسب سرعتها النهائية فيه .ب- احسب سرعة نفس الفقاعة إذا تحركت في الماء.

17- يتحرك الماء بسرعة $0.5m/s$ داخل أنبوب نصف قطره $2.0mm$ وكانت درجة الحرارة $20.00C$.

أ- احسب عدد رينولد. ب- ما طبيعة التدفق.

18- عند درجة حرارة 20.0^0C كان الماء يندفع إلى الخارج من أنبوب نصف قطره $8.0\ cm$ وبسرعة $0.25\ m/s$.

أ- ما طبيعة التدفق. ب- احسب معدل تدفقه من الأنبوب.

الباب الثالث

خواص المادة

Properties of matter



3.1 خواص المادة الصلبة Properties of solids

تتركب المادة من ذرات أو جزيئات يربط بينها قوى تكون صغيرة جداً في حال الغازات وتكون أكبر في حال السوائل وتكون كبيرة جداً في حال المواد الصلبة، هذه القوى تحدد شكل وحجم المادة . ففي حال الغازات والسوائل ونتيجة لصغر قوى الربط فإن ذراتها وجزيئاتها تتحرك عشوائياً ولا يكون لها ترتيب منتظم يحدد شكلها أو حجمها بل يشكلها الوسط الحاوي لها . وهذا بخلاف الحالة الصلبة ذات قوى الربط العالي الذي يحدد معه شكل وحجم المادة.

والمواد الصلبة إما بلورية Crystals أو غير بلورية NonCrystals :

أولاً – المواد الصلبة البلورية وفيها تترتب الذرات بانتظام على شكل خلايا ، تتكرر في كل الاتجاهات مكونة الجسم .

ثانياً – مواد غير بلورية مثل الزجاج وهي شبيهة بسائل عالي التبريد إذ أن لها صفات قريبة من صفات السوائل .

3.2 قوى الربط في المواد الصلبة Binding Forces

تحافظ المادة الصلبة على شكلها الثابت نتيجة لمحصلة قوى كبرى بعضها قوى جذب والأخرى قوى طرد ونقوم هنا بإعطاء لمحة عن قوى الجذب وهي ثلاث قوى:

أ- قوى كولومب Coulompic Forces : وتنشأ من تجاذب الشحنات الكهربية المختلفة على الذرات المتجاورة كما يحصل في بعض المركبات مثل كلوريد الصوديوم NaCl.

ب- قوى فان درفال Vander Waals Forces : وتحدث نتيجة لدوران

الإلكترونات في مساراتها حول النواة،محدثة ثنائيات قطب كهربائية تتجاذب مع بعضها بقوى غالبا ما تكون ضعيفة كما في الشمع.

جـ — قوى التبادل Exchange Forces: وتنشأ عندما ينتقل إلكترون من ذرة إلى أخرى تجاورها كما يحدث في الاتحاد الكيميائي لذرتين وهذا الانتقال يسبب تلاصق الذرتين بقوى ربط كبيرة .

أما قوى الطرد فتنتج عن تنافر السحب الإلكترونية المحيطة بكل ذرة مع مثيلاتها للذرات المجاورة وهذه القوى تصبح كبيرة جداً عند اقتراب الذرات من بعضها بدرجة كبيرة .

3.3 منحنى طاقة الوضع Potential Energy Curve

لتمثيل قوى الربط بين الذرات نعتبر جزيء ثنائي الذرة في جسم صلب بين ذرتيه قوى جذب ويمكن تمثيلها بمعادلة الجهد

$$U_1(r) = -\frac{a}{r^n} \tag{3.1}$$

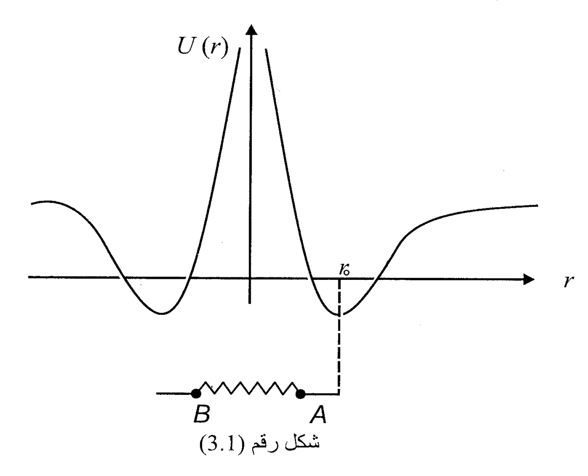
وقوى تنافر ويمكن تمثيلها بمعادلة مشابهة

$$U_2(r) = \frac{b}{r^m} \tag{3.2}$$

حيث إن n و m ثوابت تتغير حسب حالة المادة فمثلاً في حالة $n = 1$ يكون الجهد $U_1(r)$ كولومبي ، ويمكن ضم المعادلتين (3.1) و (3.2) ليمثلا الجهد الكلي للجزيء

$$U(r) = -\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^m}$$

هذا ويمثل كل جهد في الشكل (3.1) بئر الجهد للذرتين A و B والتي تهتز فيها الذرة اهتزازاً توافقياً حول نقطة اتزانها



شكل رقم (3.1)

وهذه الحركة تزداد بزيادة درجة الحرارة ومن ثم تزيد السعة والتي تسبب التمدد بالحرارة في الأجسام الصلبة.

مثال 3.1

تتغير طاقة الوضع لجزيء ثنائي وفقاً للمعادلة :

$$U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

أ- استنتج قيمة r عندما تكون الطاقة أقل ما يمكن وكذلك عند القيمة الصفرية لها.

ب- استنتج القوة بين الذرتين وكذلك طاقة التحلل للجزيء.

الحل :

أ- للحصول على أقل طاقة نفاضل بالنسبة للإزاحة ونساوى بالصفر

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=r_0} = \frac{a}{r_0^{\,2}} - \frac{2b}{r_0^{\,3}} = 0$$

ومنها نجد أن:

$$r_0 = \frac{2b}{a}$$

$$U_{\min}(r) = -\frac{a^2}{2b} + \frac{a^2}{4b} = -\frac{a^2}{4b}$$

قيمة r عند القيمة الصفرية

$$0 = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

ومنها نجد أن:

$$r = \frac{b}{a}$$

ب- نعلم أن:

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{a}{r^2} + \frac{2b}{r^3}$$

ويلاحظ أنه عند $r = \frac{2b}{a}$ تكون القوة تساوي الصفر ، وعليه فإن القوة موجبة لقيم إزاحة أقل من $\frac{2b}{a}$ أي يكون هناك تنافر وعندما تكون الإزاحة أكبر من $\frac{2b}{a}$ تبدأ قوى التجاذب بين الذرتين.

أي أن طاقة التحلل هي الشغل اللازم لفصل ذرتين نهائياً

$$E_{\infty} = U(\infty) - U(r_0)$$

$$= 0 - \left(- \frac{a}{\frac{2b}{a}} + \frac{b}{\frac{4b^2}{a^2}} \right) = \frac{a^2}{4b}$$

أي أن طاقة التحلل للجزيء تكون أكبر من $U(\infty)$.

3.4 أنواع الجوامد المتبلورة Kinds of Crystallized Solids

1- البلورات الأيونية Ionic Crystals

ومن أمثلتها كلوريد الصوديوم Na Cl ، إذ يوجد بذرة الصوديوم إلكترون واحد في مداره الخارجي ، بينما المداران الأول $1s^2$ والثاني $2s^2$ $2p^2$ مشبعين بالإلكترونات . لذلك إذا أزيل هذا الإلكترون من ذرة الصوديوم يصير تركيبها مثل ذرة النيون وهذا التركيب أكثر استقراراً .

وبالنظر إلي التركيب الإكتروني لذرة الكلور نجد أنه ينقصها إلكترون واحد في مدارها الثالث لتتشبع إلكترونياً وتصير مثل ذرة الأرجون الأكثر استقراراً . لذلك فإن اتحاد ذرتي الصوديوم والكلور يتم سريعاً ويكون ملح الطعام المتكون على الصورة الأيونية Na^+Cl^- وتكون قوى الربط الرئيسية بين الأيونات في هذا التركيب هي القوى الكولومية بين الشحنات المختلفة على الأيونات المتجاورة .ونظرا لأن كلوريد الصوديوم ملح متعادل كهربيا بالرغم من تكوينه من أيونات موجبة وسالبة ، لذلك يجب أن تكون الأيونات متراصة تبادلياً في أي اتجاه ، أي أن كل أيون صوديوم

يحيط به ستة أيونات كلور ، كأقرب جيران ويكون التركيب البلوري هو التكعيبي البسيط Simple Cubic .

2 – البلورات الجزيئية Molecular Crystals

يكون الترابط بينها بقوى فان درفال Vander Waal Forces ، جميع ذرات البلورة متشابهة ومتعادلة كهربياً ، وتحمل الذرة شحنات سالبة تكوّن ثنائي قطب كهربي electric dipole . تترتب ثنائيات القطب في الذرات المتجاورة بحيث تكون الشحنات المختلفة أقرب ما يمكن دائماً ، وتكون القوى الكهربية المحصلة هي الفرق بين قوى التجاذب والتنافر بين الشحنات المختلفة والمتشابهة . ويكون الجذب أكبر قليلاً من التنافر لقرب الشحنات المختلفة عن الشحنات المتماثلة .

يكون الترابط هنا ضعيفاً ولذلك تكون درجة انصهار مثل هذه المواد صغيرة كما في الشمع مثلاً.

3 – البلورات التساهمية Covalent Crystals

في هذه البلورات تكون الكثافة الكهربية بين الذرات المتجاورة كبيرة وتشترك الإلكترونات بين الذرات لتشبيع قشرتها الخارجية . ومثال ذلك ذرة الكربون حيث يوجد أربعة إلكترونات في قشرتها الثانية التي تتشبع بعدد ثمانية إلكترونات ، فإذا توزعت ذرات الكربون بحيث يكون لكل ذرة كربون أربع ذرات كأقرب جيران ، يمكن أن تشترك كل ذرتين متجاورتين في إلكترونين وتصبح بذلك جميع ذرات الكربون في الجسم الصلب وكأن بأغلفتها الخارجية عدد ثمانية إلكترونات لكل وليس أربعة فقط ، وهذا الوضع مستقر وينشأ عن ذلك قوى تساهمية كبيرة كما في حالة الماس .

4 – البلورات الفلزية Metal Crystals

تتميز الفلزات بعدد صغير من الإلكترونات في الأغلفة الخارجية ، بينما تكون الأغلفة الداخلية مشبعة مما يجعل ترابط الإلكترونات الخارجية بالنواة ضعيفاً.

ولذلك تتكون سحابة من الإلكترونات تحيط بأيونات هذه الذرات ،وتكون قوى التجاذب بين الأيونات والسحابة الإلكترونية هي القوى الأساسية للترابط بين ذرات الفلز .وتتميز هذه الرابطة بأنها مرنة Flexible ويعود ذلك لعدم وجود ربط مباشر بين الذرات وبعضها ، كما في الحالات السابقة وإنما يجيء الربط بين الأيون والسحابة الإلكترونية المحيطة به .

3.5 التركيب البلوري للأجسام الصلبة Crystal Structure

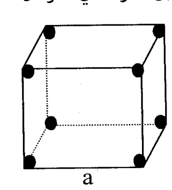
تترتب الذرات داخل شبيكات الأجسام البلورية ترتيباً منتظماً ، لتكون خلايا متماثلة إذا أُزيح أي منها في الاتجاه x أو الاتجاه y أو الاتجاه z في الفراغ لا يتغير الترتيب الذري ، ونقط الاتزان لذراتها تامة التماثل. ويتركب الجسم البلوري من عدد كبير من الخلايا المتراصة ، وقد وجد برافيه من دراسات هندسية لترتيب عدد لانهائي من النقاط بشكل منتظم أن هناك سبعة أنظمة بلورية تنتظم بداخلها أربع عشرة وحدة خلية ، يمكن أن تترتب النقاط ترتيباً في الفراغ كما هو الحال في الشبيكة البلورية.

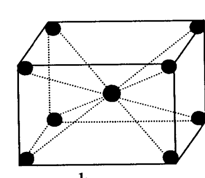
ومن أهم هذه الأنظمة البلورية النظام التكعيبي الذي تترتب ذرات معظم الأنظمة المعرفة من الفلزات على صورته. وخلية هذا النظام على شكل مكعب تترتب فيه الذرات كالتالي :

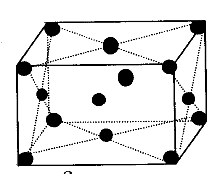
أ-التكعيبي البسيط : وتوجد ذرة النظام في كل ركن من الأركان الثمانية للمكعب كما بالشكل (3.2a).

ب- التكعيبي متمركز الجسم وتوجد ذرة النظام في مركز المكعب بالإضافة إلى الذرات في الأركان الثمانية كما بالشكل (3.2b).

ج- التكعيبي متمركز الوجه: ويوجد بمركز كل وجه من أوجه الخلية ذرة بالإضافة إلى الذرات في الأركان الثمانية كما بالشكل (3.2c).







الشكل (3.2) يمثل الشكل (a) التكعيبي البسيط ، ويمثل الشكل (b) التكعيبي بزيادة ذرة في مركزه ، ويمثل الشكل (c) التكعيبي متمركز الوجه.

3.6 الإجهاد Stress

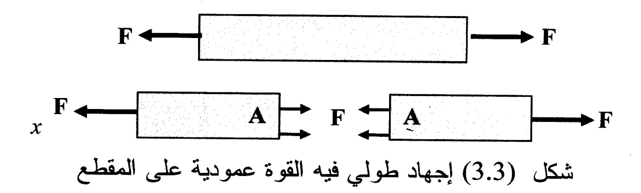
عندما ندرس تأثير القوى على الأجسام بأنواعها فإننا لا نتعرض للتشوُّهات في هذه الأجسام نتيجة لهذا التأثير. وفي الواقع فإن كل الأجسام قابلة للتشوُّه وذلك بتغيُّر الشكل أو الحجم أو كلاهما ويقل هذا التشوُّه في الأجسام ذات قوى الربط العالية بين ذراتها.

وسوف ندرس خصائص المرونة للأجسام الصلبة اعتماداً على معرفة الإجهاد Stress والانفعال Strain لهذه المواد.

يُعرف الإجهاد بأنه **الكمية المتناسبة طرداً مع القوة المسبِّبة للتشوُّه والواقعة على مساحة من الجسم.**

$$\text{الإجهاد} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}} = \frac{F}{A} \qquad (3.3)$$

والإجهاد هنا يسمى بالإجهاد الطولي Tensile Stress وذلك لأن كل جزء من المادة يسحب الجزء التالي له ويسمى كذلك بالإجهاد العمودي وذلك لأن القوة المسبّبة للإجهاد عمودية على المساحة. انظر الشكل (3.3) ، أما وحدات الإجهاد فهي النيوتن لكل متر مربع أي الباسكال Pascal وهي نفس وحدة الضغط وتقاس كذلك بالداين لكل سم مربع.



شكل (3.3) إجهاد طولي فيه القوة عمودية على المقطع

مثـال 3.2

علّق جسم كتلته $100.0\ kg$ من طرف سلك مدلى نصف قطر مقطعه $1.0\ mm$. عين قيمة الإجهاد العمودي الواقع على مقطع السلك.

الحـل :

نعوض في معادلة الإجهاد عن وزن الجسم ومساحة مقطع السلك.

$$Stress = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{100.0\,kg \times 9.8\,m/s^2}{\pi\left(1.0\times10^{-3}\,m\right)^2} = 3.12\times10^8\ Pa$$

مثـال 3.3

تحمل يد جسماً كتلته $5.0\ kg$ ، معتبراً اليد دائرة نصف قطرها $6.0\ cm$ ، احسب الإجهاد الواقع عليها.

الحـل :

بالتعويض عن وزن الجسم ومساحة اليد في المعادلة :

$$Stress = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{5.0\,kg \times 9.8\,m/s^2}{\pi\left(6.0\times10^{-2}\,m\right)^2} = 4.33\times10^3\ Pa$$

والآن ندرس الإجهاد الواقع على مقطع مائل من القضيب وله اتجاه اختياري. في هذه الحالة تكون المساحة المعرضة للإجهاد أكبر من المساحة العمودية على اتجاه القوة، انظر الشكل (3.4) ، ويمكن تحليل القوة إلى مركبتين إحداهما عمودية على السطح المائل $F_\perp$ وتسبِّب الإجهاد العمودي، أما الأخرى فإنها تلامس السطح المائل $F_{\parallel}$ وتسبِّب الإجهاد القصي على المقطع.

الإجهاد العمودي $= \dfrac{F_\perp}{A}$

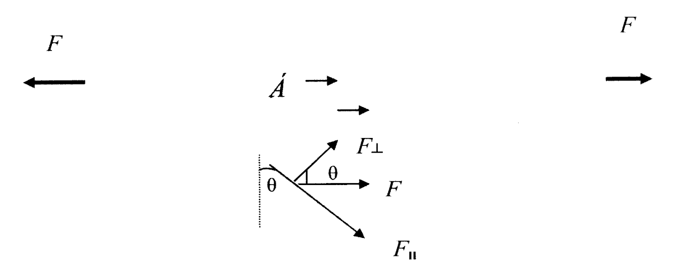
$\frac{F_{II}}{A}$ = الإجهاد القصي

ومن الشكل يمكن إعادة كتابة المعادلتين أعلاه بالصيغتين

$$\text{الإجهاد العمودي} = \frac{F\cos\theta}{A'} \qquad (3.4)$$

$$\text{الإجهاد القصي} = \frac{F\sin\theta}{A'} \qquad (3.5)$$

حيث A' هو مساحة السطح المائل



شكل (3.4) إجهاد طولي فيه القوة تؤثر على سطح مائل

مثال:

لدينا جسم يميل مقطعه عن الرأس بزاوية 36.9^{6} وله مساحة قدرها $20cm^2$. إذا سحب الجسم بقوة أفقية قدرها 10^4N، احسب الإجهاد العمودي على وجه الجسم وكذلك احسب الإجهاد الموازي له.

الحل :

نعين الإجهادين العمودي والموازي على التوالي باستخدام المعادلتين (3.4) و (3.5) ونرمز لهما بالرمزين $S_\perp$, S_{11}.

$$S_\perp = \frac{F_\perp}{A^{'}} = \frac{F\cos\theta}{A^{'}} = 10^4 N\cos\theta$$

$$= \frac{10^4 N\cos 36.9}{20\times10^{-4}\ m^2} = 3x10^6 \rho_a$$

$$S_{11} = \frac{F_{11}}{A^{'}} = \frac{F\sin\theta}{A^{'}} = \frac{10^4 N\cos 36.9}{20\times10^{-4} m^2} = 4\times10^6 N$$

3.7 الانفعال Strain

يُعرف الانفعال بأنه **التغيُّر النسبي في أبعاد أو حجم الجسم المُجهَد**. والانفعال إما أن يكون انفعالاً طولياً أو انفعالاً مساحياً أو انفعالاً حجمياً، وسوف نتعرَّض للحالات الثلاث على النحو التالي:

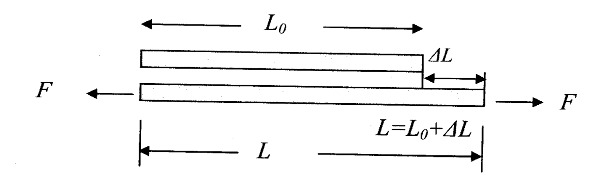
النوع الأول: الانفعال الطولي Tensile Strain

لنأخذ قضيباً طوله L_0 واستطال بمقدار ΔL عند التأثير عليه بقوتين متساويتين ومتعاكستين حيث $\Delta L = L - L_0$ وL هو الطول بعد التأثير، انظر الشكل (3.5) .

ومن التعريف فإن الانفعال الطولي للقضيب يعطى بالعلاقة:

$$\text{الانفعال الطولي} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \qquad (3.6)$$

ولو ضغطنا القضيب فإن الانفعال يعطى بنفس الطريقة، أي أنه النسبة بين النقص في الطول والطول الأصلي.



شكل (3.5) إجهاد طولي استطال فيه الجسم بمقدار ΔL عند التأثير عليه بقوة قدرها F

النوع الثاني : الانفعال القصي Shear Strain

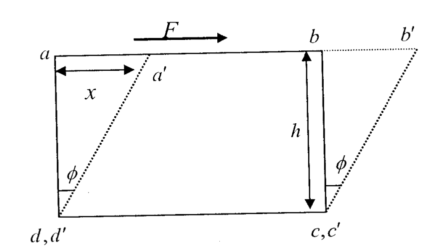
لنأخذ جسماً مثبت القاعدة ونؤثر على سطحه العلوي بقوة ملامسة للسطح. هذه القوة تحدث تشوهاً عاماً في الجسم وهذا التشوُّه يكون أوضح على السطح العلوي ويقل مع الابتعاد عنه ويمثل الانفعال بالشكل (3.6). وفيه يمثِّل الشكل $abcd$ حالة الجسم قبل الإجهاد ويمثل $a'b'c'd'$ حالة بعد الإجهاد. علماً بأن قاعدته متينة ويمثلها الركنان d,d' و c,c' ويُعرف الانفعال القصي **بأنه النسبة بين الإزاحة للركن العلوي والارتفاع والممثل بظل الزاوية** ϕ المبينة في الشكل.

$$\tan\phi = \frac{x}{h} = \text{الانفعال القصي} \tag{3.7}$$

وحيث إن $h>>x$ فإن الزاوية ϕ صغيرة جداً وعليه فإن الانفعال يُقرب بالصيغة

$$\frac{x}{h} = \phi \tag{3.8}$$

وقيمة الزاوية في المعادلة (3.8) مقدرة بالريديان .



شكل (3.6) جسم ثبتت قاعدته وأثرت على سطحه الموازي قوة مماسية محدثة انفعالاً قصياً

مثـال 3.4

جسم من الفولاذ أبعاده $5.0cm$ و $20.0cm$و $20.0cm$ ومثبت القاعدة. أثرت على وجهه العلوي قوة لتصبح أبعاده 5.0cm و $20.5cm$ و 20.0cm. احسب الانفعال القصي.

الحل:

نلاحظ أن الاستطالة في طول الوجه العلوي هي 0.5cm ومن المعادلة (3.9) يكون الانفعال القصي $\phi = \frac{x}{h} = \frac{.05cm}{20.0cm} = 0.025rad = 1.43^{\circ}$

النوع الثالث : الانفعال الحجمي Volume Strain

ويحدث هذا الانفعال عند الضغط على كامل الجسم ويحدِث تغيراً فيه مقداره ΔV ويُعرف بأنه النسبة بين التغير في الحجم والحجم الأصلي.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} \qquad (3.9)$$

مثال 3.5

كرة من الرصاص حجمها $2.0m^3$ غُمرت في البحر فنقص حجمها بمقدار 5.0% من الحجم الأصلي . احسب الانفعال والنقص في نصف قطرها.

الحل:

نعلم أن الانفعال الحجمي له الصيغة

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{0.95V_0 - V_0}{V_0} = -0,05$$

ولمعرفة النقص في نصف القطر فإن الحجم بعد الغمر هو:

$$V = V_0 + \Delta V = V_0 - 0.05V_0 = 1.95m^3$$

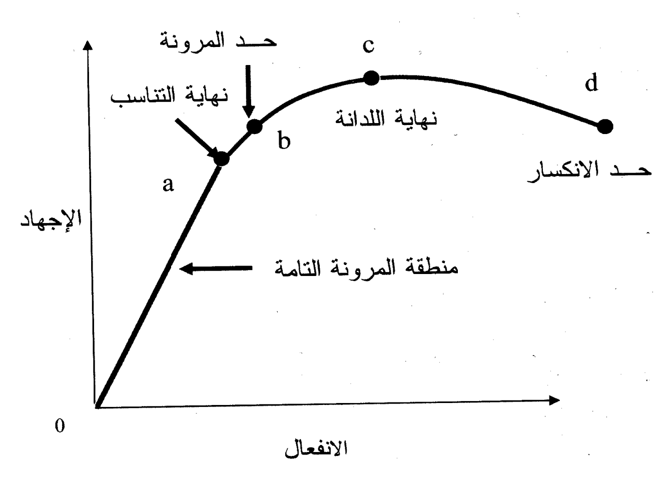
وحيث إن:

$$1.95m^3 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \quad و \quad 2.0m^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

فإن $\Delta r = 6.6mm$ ويمثل النقص في نصف القطر.

3.8 المرونة واللدانة Elasticity and Plasticity

لو أجرينا تجربة بسيطة بتعليق أجسام في سلك مدلي حيث نبدأ بأجسام صغيرة ثم نزيد الوزن بالتدريج وفي كل مرة نسجل الوزن وما يقابله من استطالة وبدراسة النتائج نجد أن أوزان الأجسام الصغيرة تتناسب طرداً مع الاستطالة أي أن الإجهاد يتناسب طرداً مع الانفعال وبرفع هذه الأثقال يعود السلك إلى حالته السابقة.

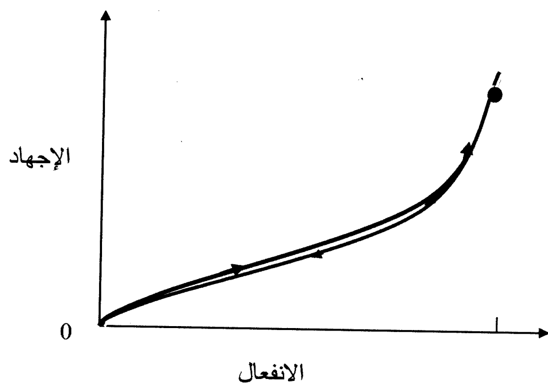


شكل (3.7) منحنى المرونة الذي يبين العلاقة بين الإجهاد والانفعال

وفي هذا الجزء من التجربة يتحقق قانون هوك Hooke's law المعروف ويتمثل في الجزء oa من الرسم، انظر الشكل (3.7).

إذا كبر الجسم المعلّق قليلاً فإن الإجهاد لا يتناسب مع الانفعال لكن لا زال الجسم مرناً ويعود إلى حالته السابقة عند رفع الثقل ويمثل على الرسم بالجزء ab ونسمي النقطة b بحد المرونة أو نهاية المرونة التامة. بعد هذه النقطة نجد أن أي إضافة في الوزن يقابلها زيادة أكبر في الاستطالة أي أن الانفعال أكبر من سابقه في المنطقة ob ويمثل على الرسم بالجزء bc وتسمى منطقة اللدانة وبرفع الثقل عن السلك نجد تشوهاً دائماً أي أن السلك لم يعد إلى طوله السابق وبجانب ذلك فلو أجرينا التجربة بطريقة عكسية أي أن نخفّف الأوزان بالتدريج فإننا لا نحصل على الاستطالة المقابلة لنفس الأوزان. أي أن الجسم أصبح لدناً وحصل به تشوُّه دائم ويمثل بالشكل (3.8)

بعد النقطة c نجد أنه بزيادة الوزن (أي بزيادة الإجهاد) زيادة بسيطة فإن الاستطالة تزداد باضطراد (أي يزداد الانفعال) إلى أن يصل الجسم إلى نقطة ينكسر عندها fracture point وتمثل بالنقطة d على الرسم.



شكل (3.8) مخطط بين الإجهاد والانفعال يبين لدانة جسم

3.9 معاملات المرونة Elastic Module

1 – معامل المرونة الطولي Young's Modulus

من دراستنا السابقة للمرونة لاحظنا علاقة طردية بين الإجهاد والانفعال وذلك لقيم إجهاد لا يتعدى فيها انفعال الجسم حد المرونة. وتسمّى النسبة بين الإجهاد والانفعال بمعامل المرونة وهذا المعامل إما أن يكون طولياً وهذا خاص بالأجسام الصلبة ويسمى في هذه الحالة معامل يونج Young's Modulus ويشار إليه بالرمز Y

$$Y = \frac{\text{الإجهاد الطولي}}{\text{الانفعال الطولي}} = \frac{F_{\perp} / A}{\Delta L / L_0} = \frac{L_0 F_{\perp}}{A \Delta L} \tag{3.10}$$

حيث $F_{\perp}$ هي القوة المؤثرة على الجسم وعمودية على مقطعه و ΔL هي الاستطالة الناتجة عن تأثير هذه القوة. A هي مساحة المقطع و L_0 هو طول الجسم قبل التأثير، هذا وفي حالة بقاء نسبة الإجهاد إلى الانفعال ثابتة أي أنها في حدود المرونة التامة فإن هذه النسبة تعبّر عن قانون هوك Hooke's Law والذي له الصيغة:

$$F_{\perp}=k\,\Delta L=kx \tag{3.11}$$

وبمقارنة المعادلتين أعلاه نجد أن:

$$K = \frac{YA}{L_0} \tag{3.12}$$

وحيث إن الانفعال هو نسبة بين طولين لا وحدة له، فإن معامل يونج يأخذ نفس وحدة الإجهاد وهي نيوتن/متر مربع N/m^2 أي الباسكال.

كما أنه في حالة الإجهاد الطولي يصاحب الاستطالة نقص في أبعاد الجسم العمودية على اتجاه الإجهاد، وهذا النقص يتناسب طرداً مع الاستطالة.

مثال 3.6 :

احسب الوزن اللازم تعليقه في سلك نحاسي مساحة مقطعه $1.0mm^2$ ليستطيل بمقدار يساوي عشر طوله الأصلي.

الحل:

لدينا من المعادلة. (3.10)

$$F = \frac{YA\Delta L}{L_0}$$

وحيث إن:

$$\Delta L = 0.1L_0, A = 1.0\times10^{-6}m^2, Y = 1.1\times10^{11}Pa$$

فإن:

$$F = \frac{1.1\times10^{11}\times10^{-6}\times0.1L_0}{L_0} = 1.1\times10^{4}Pa$$

مثال 3.7 :

قضيب متجانس كتلته $10.0kg$. علق أفقيا بثلاثة أسلاك من الفولاذ قطر مقطع كل منها $1.0mm$، وأطوال اثنين منها $150.0cm$ بينما طول الثالث $150.02cm$.
ربط السلك الأطول من منتصف القضيب بينما ربط السلكان الآخران من الأطراف .

أ- احسب الاستطالة في كل سلك.

ب- احسب ما يحمله كل سلك من وزن القضيب.

الحل :

أ-حيث إن القضيب أفقي فإن الاستطالة في كل من السلكين عند الأطراف هي ΔL بينما الاستطالة في السلك الثالث هي $(\Delta L - 0.02)$ cm وحيث إن: $Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$ فإن $F_1 = \frac{AY\Delta L}{L_0}$ بينما

$$F_2 = \frac{AY(\Delta l - 0.02)}{L_0 + 0.02} \approx \frac{AY(\Delta L - 0.02)}{L_0}$$

وبما أن القضيب في حالة اتزان فإن:

$$W = 2F_1 + F_2 = \frac{AY}{L_0}(3\Delta L - 0.02)$$

وبإعادة ترتيب هذه الصيغة تكون الاستطالة:

$$\Delta L = \frac{1}{3}(\frac{L_0 W}{AY} + 0.02)$$

وبالتعويض من المعطيات الآتية:

$$Y = 2.0\times10^{12} dyne/cm^2, W = 9.8\times10^6 dyne, L_0 = 150.0cm, A = 7.85\times10^{-3} cm^2$$

فإن:

$$\Delta L = \frac{1}{3}(\frac{150\times9.8\times10^6}{7.85\times10^{-3}\times2\times10^{12}} + 0.02)cm = 0.379mm$$

أما الاستطالة في السلك الأطول فإنها $(0.379 - 0.2)mm = 0.179mm$

ب–ولمعرفة الوزن الذي يتحمله كل سلك فنستخدم النسبة بين القوتين:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta L}{\Delta L - 0.02} = \frac{0.379}{0.179} = 2.12$$

إذن:

$$2.0\times2.12F_2 + F_2 = 98.0N$$

أي أن:

$F_1 = 39.65N$ بينما $F_2 = 18.7N$

أي أن السلك الأطول يحمل $1.9kg$ بينما يحمل كل سلك آخر $4.05kg$

2 – معامل المرونة القصي The Shear Modulus

النوع الثاني من معاملات المرونة هو معامل المرونة القصي أو المساحي Shear modulus ويرمز له بالرمز S ويُعرف في حدود عمل قانون هوك بأنه النسبة بين

الإجهاد القصي والانفعال القصي.

$$S = \frac{\text{الإجهاد القصي}}{\text{الانفعال القصي}} = \frac{F_{II}/A}{x/h}$$

$$= \frac{hF_{II}}{Ax} = \frac{F/A}{\tan\phi} = \frac{F/A}{\phi} \qquad (3.13)$$

و ϕ محسوبة هنا بالراديان. حيث إن واحد راديان يساوي 57.3°

هذا المعامل يأخذ في الغالب حوالي نصف قيمة معامل المرونة الطولي لنفس المادة. كما أن له مسميات أخرى مثل معامل الصلابة The Modulus of Rigidity أو معامل التشويه Torsion modulus وأهمية هذا المعامل مرتبطة بالمواد الصلبة فقط.

مثال 3.8

جسم من الفولاذ أبعاده $5.0cm$ و $20.0cm$ و $20.0cm$ ومثبت القاعدة. أثرت على وجهه العلوي قوة قدرها $10.0^{8}N$. احسب الإزاحة الأفقية لسطحه العلوي.

الحل :

تحسب الإزاحة من المعادلة 3.13:

$$x = \frac{hF}{AS} = \frac{0.2m \times 10^{8}N}{(0.2m \times 0.05m) \times 0.84 \times 10^{11} N.m^{-2}} = 0.02m$$

3 – معامل المرونة الحجمي The Bulk Modulus

النوع الثالث من معاملات المرونة هو **معامل المرونة الحجمي** والذي يصف استجابة المادة للضغط المتجانس عليها، نفرض أن القوى الخارجية تؤثر على الجسم

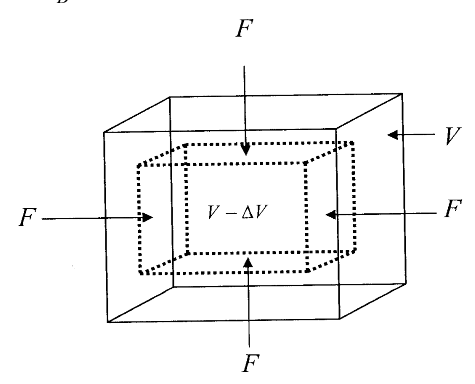
بزوايا قائمة على كل أوجهه (انظر شكل 3.9) ويتوزع أثرها على كامل المساحة . ونتيجة لهذا التأثير فإن الحجم يتغير فقط بينما لا يتغير الشكل .

ونعرف الإجهاد الحجمي (Δp) بأنه النسبة بين قيمة القوه العمودية F على السطح وقيمة مساحة السطح A ، وهذه هي الضغط $\Delta p = F/A$ ، أما الانفعال الحجمي فإنه ناتج قسمة التغير في الحجم ΔV على الحجم الأصلي V_0 ونعرف معامل المرونة الحجمي كما عُرِّف في المعادلة (3.11) ونرمز له بالرمز B

$$B = \frac{\text{إجهاد حجمي}}{\text{انفعال حجمي}} = -\frac{F/A}{\Delta V/V_0}$$

$$= -\frac{dp}{dV/V_0} \qquad (3.14)$$

وهنا لا زالت B موجبة حيث إن ΔV سالبة. ويسمى مقلوب معامل المرونة الحجمي بمعامل الانضغاط k Compressibility أي أن $k = \frac{1}{B}$



شكل (3.9)

مثال 3.9

سائل حجمه $0.5m^3$ وقع تحت ضغط قدره $0.2x10^8\ Pa$. احسب معامل الانضغاط له إذا أصبح حجمه $0.46m^3$.

الحل :

من العلاقة (3.14) نستنتج قيمة معامل المرونة الحجمي B :

$$B = -\frac{2.0\times10^8\,Pa}{(0.46-0.5)m^3/0.5m^3} = +\frac{2.0\times10^8\,Pa}{0.04/0.5} = +2.5\times10^9\,Pa$$

وبأخذ مقلوب معامل المرونة نحصل على معامل الانضغاط:

$$k = \frac{1}{B} = 4\times10^{-8}(Pa)^{-1}$$

مثال 3.10

كرة من الرصاص حجمها $0.5m^3$ غُمرت في البحر إلى عمق $2000.0m$. احسب النقص في حجم الكرة وكذلك الزيادة في كثافتها علماً بأن معامل المرونة الحجمي للرصاص هو $7.7\times10^9\ N/m^2$.

الحل :

١- لحساب النقص في حجم الكرة نستخدم المعادلة (3.15) والتي فيها

$$\Delta V = -\frac{V\,\Delta p}{B}$$

ونحسب Δp من المعادلة

$$\Delta p = \rho\, gh$$

حيث ρ هي كثافة الماء و h هو عمقه.

$$\Delta p = \left(10.0^3\,kg/m^3 \times 9.8m/s^2 \times 2.0\times10^3\,m\right)$$

$$=1.96\times10^7\,Pa$$

إذن النقص في حجم الكرة على عمق $2000.0m$ هو:

$$\Delta V = -\left(\frac{0.5\times 1.96\times 10^{7}}{7.7\times 10^{9}}\right) m^{3}$$

$$= -1.27\times 10^{-3}\ m^{3}$$

والإشارة السالبة تدل على النقص في الحجم بسبب الضغط.

2– ولحساب الزيادة في كثافة مادة الكرة فإن:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = \frac{m}{V-\Delta V} - \frac{m}{V} = \frac{m}{V}\left(\frac{1}{1-\frac{\Delta V}{V}} - 1\right) =$$

$$= \rho_0\left(\frac{1}{1-\frac{1.27\times 10^{-3}}{0.5}} - 1\right) = 11.3\times 10^{3} kg/m^{3}\times 2.56\times 10^{-3} = 28.928 kg/m^{3}$$

4 – نسبة بواسون Poisson's Ratio

نتيجة التأثير بقوة F على سلك طوله L_0 ونصف قطر مقطعه R فإنه يحدث انفعال طولي مقداره $\frac{\Delta L}{L_0}$ ويصاحبه انفعال في اتجاه متعامد مع القوة قدره $\frac{\Delta R}{R}$ ويسمى بالانفعال المستعرض ووجد أن:

$$\frac{\Delta R}{R} = -\sigma\frac{\Delta L}{L_0} \qquad (3.15)$$

ويسمى ثابت التناسب σ نسبة بواسون وهو ثابت يميز كل مادة. ويعرف بأنه النسبة بين الانفعالين المستعرض والطولي.

أما الإشارة السالبة فتعني أن الزيادة في الطول يصاحبها انكماش في القطر والعكس عند إحداث ضغط للسلك لينقص طوله ويزيد قطر مقطعه. وهي نسبة لا أبعاد لها تأخذ قيمة أقل من 0.5 وذلك حسب الآتي :

نعلم أن حجم السلك هو:

$$V = \pi R^2 L$$

وبمفاضلة المعادلة نحصل على:

$$2\pi RLdR + \pi R^2 dL = 0$$

أي أن:

$$\frac{dL}{L} = -2\frac{dR}{R}$$

أي أن نسبة بواسون هي:

$$\sigma = -\frac{dR}{R} / \frac{dL}{L} = \frac{1}{2}$$

وبمقارنتها بالمعادلة (3.15) يتضح أن $\sigma = 0.5$ وهي قيمة كبرى ونرى من الجدول (3.1) أن قيم σ تتراوح بين 0.15 و 0.45

مثال 3.11

سلك من النحاس طوله $1.0m$ ومساحة مقطعه $1.0mm^2$ علق به جسم وزنه $5.0\times10^3 N$. احسب النقص في نصف قطر مقطعه.

الحل :

لدينا من المعادلة (3.15)

$$\Delta R = \sigma \frac{R\Delta L}{L}$$

وبحساب الاستطالة من المعادلة

$$\Delta L = \frac{FL}{AY} = (\frac{5.0\times10^3\times1.0}{1.0\times10^{-6}\times1.1\times10^{11}})m = 4.5cm$$

وحيث إن $A = \pi R^2$ فإن $R = 0.56mm$

إذن

$$\Delta R = (\frac{0.32\times0.56\times45}{1000})mm = 8.1\times10^{-3}mm$$

جدول (3.1) قيم تقريبية لثوابت المرونة

المادة	معامل يونج Y $10^{11}Pa$	معامل المرونة القصي S $10^{11}Pa$	معامل المرونة الحجمي B $10^{11}Pa$	نسبة بواسون
الألمنيوم	0.7	0.3	0.7	0.16
النحاس الأصفر	0.91	0.36	0.61	0.26
النحاس	1.1	0.42	1.4	0.32
الزجاج	0.55	0.23	0.37	0.19
الحديد	1.9	0.7	1.0	0.27
الرصاص	0.16	0.056	0.077	0.43
النيكل	2.1	0.77	2.6	0.36
الفولاذ	2.0	0.84	1.6	0.19
التنجستن	3.6	1.5	2.0	0.20

3.10 العلاقة بين معاملات المرونة

Relation Between Elastic Module

1 – العلاقة بين معامل المرونة الطولي ومعامل المرونة الحجمي

The Relation Between The Young's modulus and The Bulk modulus

لتسهيل الاستنتاج نفرض أن قوى قيمة كل منها F تؤثر على أوجه مكعب طول ضلعه الوحدة . فإذا اعتبرنا الاستطالة باتجاه محور x فإن :

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F}{\Delta L}$$

أي أن الزيادة في كل ضلع هي:

$$\Delta L = \frac{F}{Y} \tag{3.16}$$

نفرض أن الانفعال المستعرض الناتج عن إحدى القوى هو:

$$\frac{\Delta W}{L} = \Delta W$$

وبالتعويض في معادلة بواسون فإن:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta L} \tag{3.17}$$

من المعادلتين (3.16) و (3.17) نرى أن النقص في أي ضلع نتيجة لتأثير القوة F العمودية عليه هو:

$$\Delta W = \frac{\sigma F}{Y} \tag{3.18}$$

وحيث إن أي ضلع يزداد طوله نتيجة القوة الموازية وفي نفس الوقت ينقص

نتيجة تأثير القوتين المتعامدتين عليه فإن طول الضلع الجديد يصبح بالتعويض من (3.17) و (3.18)؛

$$L + \Delta L - 2\Delta W = 1 + \frac{F}{Y} - \frac{2\sigma F}{Y} \tag{3.19}$$

وبالتعويض به فإن الحجم الجديد للمكعب هو:

$$V' = \left[1 + \frac{F}{Y}(1 - 2\sigma)\right]^3 = V + \Delta V$$

أي أن:

$$V + \Delta V \cong 1 + \frac{3F}{Y}(1 - 2\sigma) \tag{3.20}$$

ولكن $V = 1$ ، إذن الزيادة في الحجم هي:

$$\Delta V = \frac{3F}{Y}(1 - 2\sigma) \tag{3.21}$$

لكن

$$B = \frac{F/A}{\Delta V/V} = \frac{F}{\Delta V}$$

$$B = \frac{F}{\frac{3F}{Y}(1 - 2\sigma)}$$

أي أن:

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)} \tag{3.22}$$

وحيث إن Y و B موجبتان دائماً فإن σ تكون دائماً أقل من النصف .

2- العلاقة بين معامل المرونة الطولي ومعامل المرونة القصي

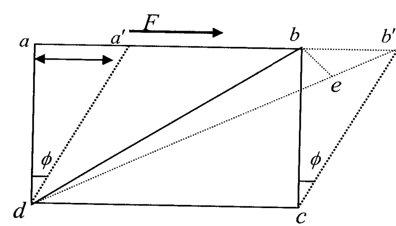
The Relation Between The Young's modulus and The Shear modulus

إذا أثرت قوة مماسة للسطح العلوي لمكعب طول ضلعه L ومثبت سطحه السفلي فإنه ينشأ إجهاد قصي قدره $\frac{F}{A}$ وكذلك انفعال قصي قدره $\frac{x}{L}$ يصاحب هذا الانفعال استطالة في القطر db تتساوى تقريباً مع الانكماش في القطر الآخر شكل(3.10).

الاستطالة النسبية في القطر db هي $\frac{eb'}{db}$

$$\frac{eb'}{db} = \frac{bb'/\sqrt{2}}{\sqrt{2}bc} = \frac{1}{2}\frac{bb'}{bc} = \frac{1}{2}\phi \qquad (3.23)$$

أي أن الاستطالة النسبية في القطر تساوي نصف انفعال القص وكذلك يمكن إثبات أن الانكماش النسبي في القطر ac يساوي نصف انفعال القص.



شكل (3.10) قوة مماسية أثرت على سطح علوي لمكعب محدثة إجهاد وانفعال قصيين

وهذا يعني " أن انفعال القص ϕ يكافئ الاستطالة النسبية في القطر مضافاً إليها انكماش نسبي في القطر الآخر عمودي عليه وكل منها يساوي نصف انفعال القص ".

نفرض الآن أن على المكعب قوى شد على وجهين متقابلين وقوى ضاغطة على وجهين آخرين عموديين على الأولين والاستطالة تساوي:

$$\Delta W + \Delta L$$

والانكماش يساوي:

$$\sigma \frac{F}{Y} + \frac{F}{Y}$$

وهما متعامدان ومتساويان ويساويان قصاً قدره ϕ لكن نعلم أن معامل الصلابة ، معامل المرونة القصي ، يعطى بالمعادلة:

$$S = \frac{F}{\phi}$$

لكن من المعادلة (3.23) نجد أن:

$$\phi = 2\left[\frac{F}{Y} + \sigma \frac{F}{Y}\right]$$

وبذلك فإن معامل الصلابة يأخذ الصيغة

$$S = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \tag{3.24}$$

ومنها نرى أن $\frac{Y}{3} \le S \le \frac{Y}{2}$ وذلك لقيم $0.0 \le \sigma \le 0.5$

وبحذف نسبة بواسون من المعادلتين (3.22) و (3.24) نحصل على العلاقة بين معاملات المرونة الثلاثة

$$Y = \frac{9BS}{3B+S} = \frac{3S}{1+\frac{S}{3B}} \tag{3.25}$$

$$Y = \frac{9S}{3+SK} \tag{3.26}$$

حيث K هو معامل الانضغاط

(3.11) الطاقة المختزنة في الأجسام المنفعلة

The Stored Energy in Strained bodies

1 – الطاقة المختزنة في حال الانفعال الطولي

The stored energy in a tensile strain

نفرض سلكاً حلزونياً أثرَّت عليه قوة استطالة F فاستطال بمقدار x والعلاقة بين F و x حسب قانون هوك هي:

$$F = kx$$

حيث $k = \frac{AY}{L}$ وحيث إن x تتغير تبعاً للقوة فإن الشغل المبذول لاستطالة السلك بمقدار x_0 هو:

$$W = \int_0^{x_0} F dx = \frac{1}{2} k x_0^2 \tag{3.27}$$

وهذا يعادل الطاقة المختزنة في السلك والتي يمكن كتابتها بالصورة الآتية :

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{AY}{L}\right)x_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Yx_0}{L}\right)\left(\frac{x_0}{L}\right)(AL)$$

$$= \frac{1}{2} \times stress \times strain \times volume \tag{3.28}$$

وهذا يعادل الطاقة المختزلة نتيجة الإجهاد الطولي.

2– الطاقة المختزنة في حال الانفعال القصي

The stored energy in a shear strain

إذا أثرت قوة مماسية F على سطح جسم مثبت القاعدة فأحدثت زاوية قص

قدرها ϕ وحيث إن العلاقة بينهما وبين معامل القص تعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{F/A}{\phi}$$

أي أن:

$$F = SA\phi$$

فإن الشغل المبذول من هذه القوة لإحداث إزاحة dx هو:

$$dW = F\,dx$$

لكن

$$\phi = \frac{x}{L}$$

وبتفاضلهما فإن:

$$dx = L\,d\phi$$

إذن

$$dW = FL\,d\phi = SAL\phi\,d\phi$$

وبإجراء التكامل فإن الشغل الكلي المبذول هو:

$$W = \int_0^{\phi_0} dW = \frac{1}{2}SAL\phi_0^2 = \frac{1}{2}(S\phi_0)(\phi_0)(AL)$$

$$= \frac{1}{2} \times stress \times strain \times volume \tag{3.29}$$

وهذا يعادل الطاقة المختزلة نتيجة الإجهاد القصي.

3 – الطاقة المختزنة في حال الانفعال الحجمي The Stored Energy in The bulk modulus

نفرض غازاً حجمه V أثرنا عليه بفارق ضغط قدره ΔP فنقص حجمه

بمقدار ΔV ليعطي معامل المرونة كما سبق بالعلاقة :

$$B = V\frac{\Delta P}{\Delta V}$$

أي أن :

$$\Delta P = B\frac{\Delta V}{V}$$

الشغل الناتج من هذا الضغط لإحداث تغير في الحجم قدره ΔV هو:

$$\Delta W = \Delta P\, dV$$

حيث dV هو جزء صغير من ΔV.

وبإجراء التكامل يكون الشغل الكلي لإحداث تغير في الحجم قدره ΔV هو:

$$W = \int B\frac{\Delta V}{V}dV = \frac{B}{2V}(\Delta V)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{B}{V}(\Delta V)\times\frac{\Delta V}{V}\times V$$

$$= \frac{1}{2}\times stress\times strain\times volume \qquad (3.31)$$

وهذا يعادل الطاقة المختزلة نتيجة الإجهاد الحجمي.

ويلاحظ أنه في الحالات الثلاث السابقة حصلنا على نفس النتيجة للطاقة المختزنة. أي أن الطاقة المختزنة = $\frac{1}{2}$ × (الإجهاد × الانفعال × الحجم).

مثال 3.12

قضيب من الفولاذ مساحة مقطعه $0.2cm^2$ أثرت على طرفيه قوة ضاغطة فنقص طوله بنسبة 0.2% من الطول الأصلي. احسب القوة المؤثرة على كل من طرفي القضيب. علماً بأن معامل يونج للمادة هو $2.0\times10^{11}Pa$.

الحـل:

نعلم أن:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

أي أن القوة:

$$F = \frac{Y\Delta LA}{L} = \frac{Y \times 2.0 \times 10^{-3} L}{L} \times A$$

$$= 8.0 \times 10^{4}\ N$$

مثال 3.13

سلك مساحة مقطعه $7.0 \times 10^{-5}\ m^2$ وطوله $0.5m$ ثبت أفقياً بين نقطتين. علّق من منتصفه جسم وزنه $100.0N$ فانخفض منتصف السلك رأسياً بمقدار $5.0mm$ احسب :

1- الإجهاد في السلك. 2- الانفعال الناتج.

3- معامل يونج لمادة السلك. 4- الطاقة المختزنة في السلك.

الحل :

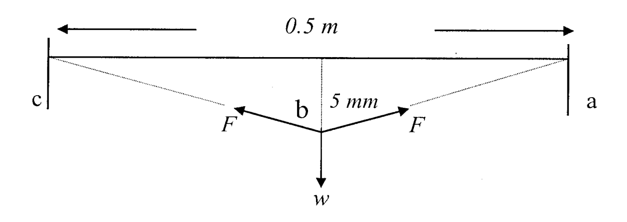
1- حيث إن الجسم المعلّق في حالة اتزان فإن:

$$W = 2F \sin\Theta$$

ولحساب القوة المؤثرة على السلك يكون

$$F = \frac{W}{2\sin\Theta} = \frac{100.0N}{2 \times 0.02}$$

$$\text{الإجهاد} = \frac{F}{A} = \frac{2500N}{7.0 \times 10^{-5} m^2} = 3.57 \times 10^{7}\ Pa$$



2 – لحساب الانفعال نحسب طولي الضلعينab و bc وتحسب الاستطالة حسب المعادلة

$$\Delta L = 2ab - 0.5$$

لكن من المثلث قائم الزاوية نحسب ab ونجد أن :

$$\Delta L \approx 0.1mm$$

$$strian = \frac{\Delta L}{L} = 2.0\times10^{-4}$$

3– معامل يونج

$$Y = \frac{stress}{strain} = \frac{3.57\times10^{7}}{2.0\times10^{-4}} = 1.78\times10^{11}\ Pa$$

4 – الطاقة المختزنة في السلك

$$U = \frac{1}{2}\times stress\times strain\times volume$$

$$= \frac{1}{2}\frac{F}{A}\times\frac{\Delta L}{L}AL$$

$$= \frac{1}{2}F\Delta L = \frac{1}{2}\times 2500\,N\times1\times10^{-4}m\ \ = 0.125\ J$$

مســــائل

1 – سلك من النحاس طوله $0.4m$ ومساحة مقطعه $0.4cm^2$ أثـرت علـــيه قـوة مقدارهـــا $10.0^4\ N$. احسب النقص الحاصل في نصف قطر المقطع.

2–علّق جسم وزنه $50.0N$ من طرف سلك طوله $0.5m$ ونصف قطر مقطعه $0.5\ mm$ ومعامل مرونته الطولي $3.0\times10^{11}\ Pa$. احسب الاستطالة في السلك وكمية الطاقة التي خزنت به.

3– مكعب طول ضلعه $10.0cm$. ثبتت قاعدته ثم أثرت على سطحه العلوي قوة مماسية مقدارها $4000.0N$. احسب مقدار الانفعال ومقدار الإزاحة للسطح العلوي. علماً بأن معامل المرونة القصي له هو $2.5\times10^{11}\ Pa$.

4 – أنبوبة منتظمة بها ماء وتتدلى رأسياً وتتعرض لشد بواسطة ثقل. أوجد نسبة بواسون لها، علماً أن متر من الأنبوبة استطال بمقدار $0.06cm$ بينما يزداد طول متر من الماء داخلها بمقدار $0.04cm$.

5– ربط جسم كتلته $20.0kg$ من طرف سلك فولاذ طوله قبل الربط $0.5m$ حرك ليدور في دائرة رأسية. سرعته الزاوية عند أسفل الدائرة $2.0rev/s$.احسب الاستطالة في السلك عندما يكون الثقل عند اسفل نقطة في الدائرة. علماً أن مساحة مقطع السلك هي $0.02cm^2$.

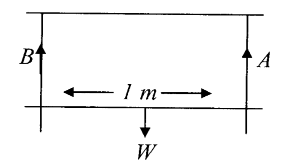
6– احسب كثافة الماء في قاع محيط عمقه $5.0km$. علماً أن معامل المرونة الحجمي للماء هو $0.5\times10^{11}\ Pa$.

7– سلكان A و B لهما نفس الطول ومن مادتين مختلفتين الأول مساحة مقطعه $2.0mm^2$ ومعامل يـــونج له $2.0\times10^{11}\ Pa$ والثاني مساحة مقطعه $3.0mm^2$ ومعامل يـــــــونج له $1.6\times10^{11}\ Pa$، علق السلكان رأسياً وعلق بطـــرفيهما قضيب مهمل الوزن طوله $1.0m$ ، ويتحرك عليه جسم وزنه W حدد موقع

تعليق الثقل W بحيث :

(1) يتساوى الإجهاد في السلكين.

(2) يتساوى الانفعال في السلكين.



8- قضيب طوله L ومساحة مقطعه A ومعامل يونج له Y تؤثر عليه قوة F ويحصل له إجهاد Q وانفعال P اشتق صيغة لطاقة الوضع لكل وحدة حجم لجسم مرن بدلالة Q و P .

9- نبله لها وتران متوازيان من المطاط طول كل منهما $15.0cm$ ومساحة مقطعه $5.0cm^2$ وضع بين الوترين حجر كتلته $30.0g$ وقذف بشد الوترين مسافة $5cm$. عين سرعة قذف الحجر، علماً أن معامل المرونة للمطاط هو $10.0^7 Pa$.

10- سلكان أحدهما من الفولاذ والآخر من النحاس، لكل منهما طول $0.5m$ ومساحة مقطعه $4.0\ mm^2$ ربطا ببعضهما وعلق بهما جسم وزنه $5.0\times10^4 N$.

أ-احسب الاستطالة في كل منهما.

ب-احسب نسبة بواسون لكل منهما، علماً بأن التغيُّر في نصف القطر هو $0.1mm$.

ج- احسب الطاقة المختزنة في كل منهما.

11- صفيحة مربعة الشكل كتلتها m علقت أفقياً بخمسة أسلاك متساوية الطول. أحدهما من الحديد عند مركز المربع ومساحة مقطعه A_1 والأربعة الأخرى من النحاس عند أطراف الصفيحة ومساحة مقطع كل منهما A_2 . إذا علم أن سلك الحديد يتحمل نصف وزن الصفيحة وأن معامل يونج للحديد هو

$2.0\times10^{11}\,Pa$ ومعامل يونج للنحاس $1.2\times10^{11}\,Pa$ فاحسب A_1/A_2.

12– وضع جسم كتلته $100.0\ kg$ على أسطوانة طولها $1.0\ m$ ونصف قطر قاعدتها $20.0cm$ ومعامل المرونة الطولي لمادتها $2.0\times10^{11}\,Pa$. احسب النقص في طول الأسطوانة وكذلك كمية الطاقة المخزونة بداخلها.

13– في المسألة 12 كانت نسبة بواسون لمادة الأسطوانة 0.2 . احسب معاملي المرونة القصي والحجمي لمادة الأسطوانة.

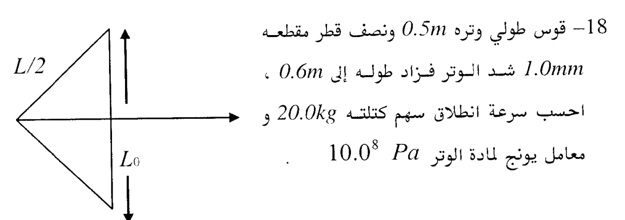
14– علقت كتلة صغيرة في طرف سلك من النحاس نصف قطره $1.0mm$. احسب الثقل الإضافي الذي يجب تعليقه ليمنع انكماش السلك إذا انخفضت درجة حرارته من $30.0\ ^oC$ إلى الصفر المئوي.

15– ثبت قضيب من النحاس من طرفيه عندما كانت درجة حرارته $250.0C^0$ ، احسب الطاقة المخزونة في وحدة الحجم منه عندما يبرد لدرجة الصفر.

16– في المثال 3.2 إذا كان التغير النسبي في طول السلك هو 2.84×10^{-3} فحدد نوع المادة المستخدمة واحسب ثابت هوك لها.

17– أثبت أن معامل المرونة الحجمي لغاز مثالي في حال ثبوت درجة الحرارة يساوي ضغط الغاز.

18– قوس طولي وتره $0.5m$ ونصف قطر مقطعه $1.0mm$ شد الوتر فزاد طوله إلى $0.6m$ ، احسب سرعة انطلاق سهم كتلته $20.0kg$ و معامل يونج لمادة الوتر $10.0^8\ Pa$.



19- سلك مساحة مقطعه $2.0\times10^{-5}\ m^2$ وطوله $0.25m$ ثبت أفقياً بين نقطتين.

علِّق من منتصفه جسم وزنه $250.0N$ فانخفض منتصف السلك رأسياً بمقدار $2.0cm$ احسب معامل يونج لمادة السلك و الطاقة المختزنة فيه.

الباب الرابع

الحرارة وقياسها

Heat and its measurement



4.1 مصادر الطاقة الحرارية The Heat Resources

للطاقة الحرارية مصادر منها:

1- التفاعلات الكيميائية Chemical Reactions

تعتبر التفاعلات الكيميائية من أهم المصادر التقليدية للطاقة، فعندما تتحِد مادتان كيميائياً ينتج عن ذلك امتصاص أو إطلاق للطاقة الحرارية، فالحرارة الناشئة عن حرق الوقود الكيميائي تنتج عن تفاعل كيميائي بين الوقود وأكسجين الهواء.

2- الطاقة الميكانيكية Mechanical Energy

للطاقة الحرارية مصدر آخر ينشأ عن تحويل أنواع مختلفة من الطاقة إلى حرارة، فمثلاً عند تصادم الأجسام أو احتكاكها الخارجي أو الداخلي تنشأ الحرارة.

3- الطاقة الكهربائية Electrical Energy

ويظهر ذلك عند مرور تيار كهربائي في سلك مقاوم نلاحظ سخونته مما يدل على تحوّل الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية.

4- الطاقة النووية Nuclear Energy

وهي طاقة غير تقليدية، تؤدي التفاعلات النووية فيها إلى إنتاج طاقة حرارية هائلة نتيجة تحويل جزء صغير من المادة إلى طاقة ويتم ذلك عند اتحاد أو انشطار نوى المواد المتفاعلة. وتُحسب الطاقة الناتجة بالعلاقة:

$$E = mc^2$$

حيث m هي الكتلة المحولة إلى طاقة و c هي سرعة الضوء.

5- الطاقة الشمسية Solar Energy

وهي نوع من الطاقة النووية إذ أنه معروف أن الحرارة المنبعثة من الشمس ناتجة عن تفاعل نووي تحررت بسببه كمية كبيرة من الطاقة ترفع درجة حرارة الشمس لتكون مصدراً مشعّاً للحرارة.

4.2 درجة الحــرارة وقياســها

Temperature and Its Measurement

تُحدد درجة الحرارة لجسم المستوى الحراري له وتختلف تماماً عن كمية الحرارة المخزونة به. فدرجة الحرارة دالة على وجود الطاقة فتزداد بزيادتها وتنقص تبعاً لها ويصاحب عادةً التغيُّر في درجة حرارة جسم تغيُّر في خواصه الفيزيائية مثل التغيّر في حجمه أو مقاومته الكهربائية أو التغيّر في الضغط خاصة للغازات وهكذا.

وتسمى أجهزة قياس درجة الحرارة بالترمومترات Thermometers . ومقاييس درجة الحرارة نوعان: نسبي Relative ومطلق Absolute .

1- المقيـاس النسـبي The Relative Scale:

ومـن أمثلـة **المقيــاس النـسـبي** المقــياس المئـوي Centigrade أو مـا يـسمى Celsius Scale نـسبة لواضعــه (1744-1701) Anders Celsius والمقيـاس الفهرنهايتي Fahrenheit Scale نسبة لواضـعه -1686) Gabriel Fahrenheit (1736 ويعتمدان على الماء. حيث تؤخذ نقطتا التجمد والغليان كدرجتين قياسيتين. ففـي الأول قـسم التـدرّج بـين القيمـة ($0.0^\circ C$) وعنـدها ينـصهر الجليـد والقيمـة $100.0^o\ C$ إلى مائة قسم وأطلق على كـل منهـا درجـة مئويـة أو (واحـد سـلزيوس) ونرمز لها بالرمز T_C وفي الثاني أعطيت نقطة انصهار الجليد القيمة 32.0^oF ونقطة

الغليان أعطيت القيمة 212.0^oF أي أن التدريج قد قسِّم إلى 180 قسماً سمِّي كل منها درجة فهرنهايت ونعطيها الرمز T_F .

2- المقياس المطلق Absolute Scale

وهذا النوع لا يعتمد على أي مادة قياسية وإنما يحدد مستواه الحراري مقدار الطاقة المخزونة في الجسم وتعتبر درجة الصفر المطلق هي الدرجة التي تنتهي عندها كمية الطاقة المخزونة في الجسم المراد قياس درجة حرارته ودرجة الصفر المطلق تقابل -273.15^oC على المقياس المئوي وهذا المقياس يسمى Kelvin نسبة لواضعه Lord Kelvin (1824-1907) ونرمز له بالرمز T. ويوجد مقياس آخر يدعى رانكين Rankine نسبة إلى واضعه William Rankine (1820-1872) ونرمز له بالرمز T_R ويُكتب (^oR).

ويربط بين المقاييس الأربعة العلاقات الآتية :

أولاً- العلاقة بين المقياسين المئوي والمطلق

$$T_c = (T - 273.15K) \ C^0/K \quad (4.1)$$

وحيث إن درجة الغليان هي $373.15\ K$ فإن:

$$T_{100} = 373.15 - 273.15 = 100.0^o\ C$$

ثانياً- العلاقة بين مقياسي الكيلفين والرانكين هي:

$$T_R = \frac{9}{5} T \quad (4.2)$$

ثالثاً- العلاقة بين مقياس الرانكين ومقياس الفهرنهايت هي :

$$T_F = T_R - 459.67^0R \quad (4.3)$$

رابعاً- العلاقة بين المقياس المئوي والمقياس الفهرنهايتي:

بالتعويض من المعادلتين (4.1) و (4.2) في المعادلة (4.3) والتي منها تظهر العلاقة بين المقياسين النسبيين بالصيغة:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32^0F \quad (4.4)$$

أو

$$T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right)^0C \quad (4.5)$$

ومنها يتضح ما ذكرنا سابقاً من أن $0.0^o\ C$ يقابل 32.0^oF و 100^oC تقابل 212^oF . والجدول (4.1) يوضح القيم المتناظرة على المقاييس الأربعة.

جدول (4.1) قيم مختلفة لدرجات الحرارة على المقاييس الأربعة

F	R	C	K
212°	672°	100°	373
32°	492°	0°	273
-109°	351°	-78°	195
-298°	162°	-183°	90
-460°	0°	-273°	0

مثال 4.1

مريض درجة حرارته 39.0^0C ، احسب درجة حرارته باستخدام المقاييس الثلاثة الأخرى.

الحل:

1- لحساب درجة حرارته بالفهرنهايت نستخدم المعادلة (4.4)

$$T_F = \left[\frac{9}{5} \times 39.0 + 32.0\right]^0 F = 102.20^0 F$$

2- ولحساب درجة حرارته بالكيلفن نستخدم المعادلة (4.1)

$$T = 39 + 273.15 = 312.15K$$

3- ولحساب درجة حرارته بالرانكين نستخدم المعادلة (4.2)

$$T_R = \frac{9}{5} T = 561.87^0 \ R$$

مثال 4.2

أ- عيِّن درجة الحرارة المئوية التي تكون قيمتها على المقياس المئوي نصف قيمتها على المقياس الفهرنهايتي.

الحل :

يوضع $T_C = \frac{T_F}{2}$ في المعادلة (4.4)

$$T_F = \frac{9}{5}\left(\frac{T_F}{2}\right) + 32F^\circ$$

وبترتيب الحدود نجد أن:

$$T_F = 320.0^0 \ F$$

و

$$T_C = \frac{320.0^\circ C}{2} = 160^0 \ C$$

ب- عيِّن درجة الحرارة المئوية والفهرنهايتية التي يتساوى عندها القياسان عددياً.

بوضع $T_F = T_C$ في المعادلة (4.4)

$$T_F = \frac{9}{5} T_F + 32.0$$

وبالضرب في المقام وإعادة الترتيب بضم المعادلة بالصيغة :

$$9T_F - 5T_F = -160.0$$

$$4T_F = -160.0$$

إذن :

$$T_F = T_C = -40.0^\circ$$

4.3 أنواع الترمومترات kinds of Thermometers [1]

يقتصر استخدام خاصية التمدد في الأجسام الصلبة لقياس درجة الحرارة فقط ، عندما تكون فروق الدرجات كبيرة وذلك لصغر معاملات [illegible] ، وعلى العكس من ذلك نجد أن التمدد في الغازات كبير جداً ، فهي أفضل من ناحية حساسيتها للتغير في الدرجة ، ولكن تكمن صعوبة استخدامها في كبر حجم مستودع الترمومتر الغازي ، مما جعلها عديمة الفائدة لقياس الدرجة في أي حيز صغير . ويستخدم عادة الزئبق كمادة ترمومترية لما يتميز به من صفات ، إذ يغلي في درجة $356.7^\circ C$ ويتجمد عند درجة $-38.9^\circ C$ ، وذلك يسمح بمدى متسع نسبيا من درجات الحرارة التي يمكن له قياسها ،كما أنه سائل معتم تسهل رؤيته في الأنابيب الزجاجية ، ومعامل تمدده الحجمي (0.00018 لكل درجة حرارة) كبير مما يسهل قياس التغير في

---

(١) منقولة من أساسيات الفيزياء ، واصف .

حجمه برفع درجة الحرارة. ويتركب الترمومتر الزئبقي المعتاد من مستودع زجاجي رقيق الجدران ، مملوء زئبقاً ويتصل بأنبوبة شعرية دقيقة المقطع ومقفلة من طرفها العلوي . عندما ترتفع درجة حرارة الترمومتر يتمدد الزئبق في المستودع فيرتفع شريط منه في الأنبوبة الشعرية ، ولمعايرة الترمومتر يوضع المستودع في جليد مجروش في درجة الصفر المئوي ثم في ماء يغلي ، ويحدد ارتفاع شريط الزئبق في الأنبوبة الشعرية في كل من الحالتين، ثم تقسم المسافة بينهما إلى مائة قسم يعادل كل منها درجة مئوية. ويوجد أنواع من الترمومترات الزئبقية كترمومتر بكمان الشديد الحساسية إذ يستطيع قياس التغير في درجة الحرارة بمقدار يصل إلى 0.01 من الدرجة وهناك أيضا الترمومتر الطبي المستخدم لتسجيل درجة حرارة الإنسان .

4.3.1 ترمومتر المقاومة البلاتيني

Platinum Resistance Thermometer

تتغير مقاومة الموصل المعدني مع درجة حرارته وفقاً للمعادلة التالية :

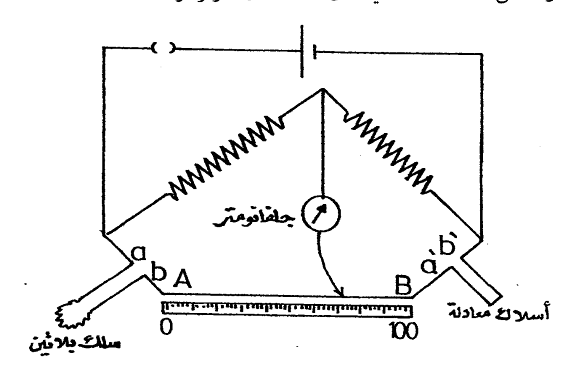
$$R_T = R_0(1+\alpha T) \tag{4.6}$$

حيث R_T , R_0 هما مقاومتا الموصل عند الدرجتين 0 , T على الترتيب ، α هو معامل زيادة المقاومة مع درجة الحرارة . وتستخدم هذه الظاهرة في ترمومتر المقاومة البلاتيني لقياس درجة الحرارة.

يتركب الترمومتر من سلك من البلاتين يلتف حول شريحة رقيقة من الميكا العازلة وتتصل نهايتا السلك بجهاز حساس لقياس المقاومة يتركب عادة من قنطرة هويتستون شكل (4.1) يوضع السلك البلاتيني كأحد أذرعها ، ثم يوجد وضع الاتزان وعدم الانحراف في الجلفانوميتر، ومنه يمكن حساب قيمة مقاومة السلك بدلالة مقاومة باقي أذرع القنطرة.

لمعادلة التغير في مقاومة أسلاك التوصيل ab للترمومتر البلاتيني — نتيجة لوجودها داخل الوسط الساخن — يوضع في ذراع القنطرة المقابل للترمومتر أسلاك معادلة b ، a تمثل أسلاك التوصيل البلاتيني ، وتوضع في نفس الوسط الساخن شكل (4.1) حتي تتغير مقاومتها بنفس القدر كأسلاك توصيل سلك الترمومتر ، وبذلك يكون التغير في المقاومة الذي تسجله قنطرة هويتستون ناشئاً فقط عن تغير مقاومة سلك البلاتين وحدة مع درجة الحرارة .

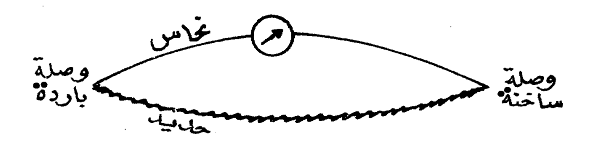
ويعاير الجهاز ليعطي درجات الحرارة المقاسة مباشرة دون الاحتياج لحساب مقاومة الترمومتر في كل حالة . وذلك باستخدام سلك مقاومة AB كالموجود بالقنطرة المترية حيث يعين عليه مواضع الاتزان في درجات معلومة (كنقطتي انصهار الجليد وغليان الماء) فإذا قسمت المسافة بينهما إلى عدد مائة قسم يناظر كل قسم منها درجة واحدة مئوية . وبذلك يمكن قراءة درجة حرارة وسط بمجرد إيجاد موضع الاتزان على السلك AB الذي يمثل حينئذ ساق الترمومتر .



شكل(4.1) ترمومتر المقاومة البلاتيني

4.3.2 ترمومتر الازدواج الحراري The Thermo Couple

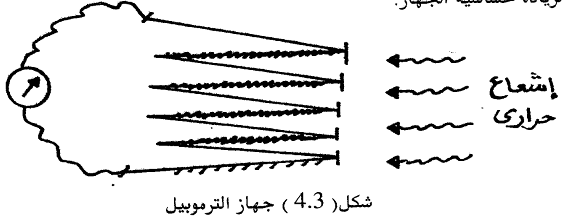
وجد سيبك أنه حينما يوصل فلزان مختلفان – كالنحاس والحديد مثلا – ليكونان ازدواجا حراريا كالمبين بشكل (4.2) تتولد قوة دافعة كهربية عندما ترتفع درجة حرارة إحدى الوصلتين بالنسبة للأخرى.وتتوقف شدة التيار الناشئ – كما يسجله الجلفانومتر الموجود بالدائرة – على فرق درجات الحرارة بين الوصلتين وتعرف هذه الظاهرة بالخاصة الكهروحرارية. ويمكن هنا أيضا معايرة مقياس الجلفانومتر ليعطي درجات الحرارة مباشرة ، وذلك بوضع الوصلة الساخنة في ما ء يغلي درجة حرارته $100^0 C$، وبتقسيم مقدار الانحراف إلى مائة قسم يعبر كل منها عن درجة حرارة مئوية .



شكل (4.2) ترمومتر الازدواج الحراري

ونظراً لشدة حساسية هذا الترمومتر يستخدم عادة لقياس التغيرات الصغيرة في درجات الحرارة كما أن لصغر سعته الحرارية (وهي هنا السعة الحرارية للوصلة الكهربائية) لا يؤثر وضع الترمومتر في الوسط المختبر على درجة حرارته، خاصة إذا كان هذا الوسط له سعة حرارية صغيرة.

ويستخدم أيضا ترمومتر الازدواج الحراري في قياس الإشعاع الحراري بجهاز يسمى الترموبيل، ويتركب من مجموعة كبيرة من الازدواجات تتصل على التوالي لزيادة حساسية الجهاز.



شكل(4.3) جهاز الترموبيل

عندما تتعرض الوصلة الأمامية للإشعاع الحراري ترتفع درجة حرارتها بالنسبة لدرجة حرارة الوصلات الخلفية . إذ أنها محفوظة داخل الجهاز بعيدا عن الإشعاع ، ويسبب الفرق في درجتي الحرارة بين الوصلات الأمامية والخلفية تياراً كهربائياً ، ينتج عنه انحراف الجلفانومتر بمقدار يتناسب مع شدة الإشعاع الساقط ويستخدم الترموبيل عادة كأداة تسجيل لطيف الأشعة تحت الحمراء.

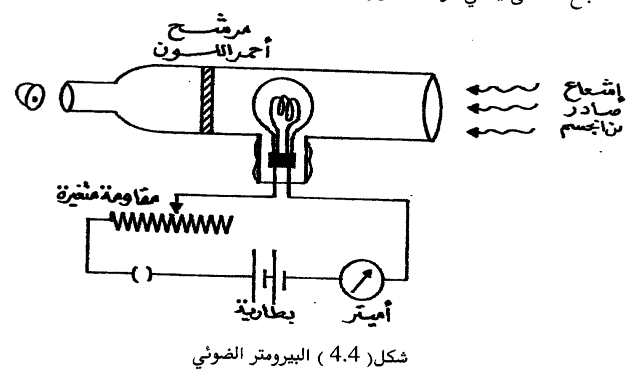
4.3.3 البيرومتر الضوئي Optical Pyrometer

عندما يسخن جسم لدرجة حرارة مرتفعة يصل لدرجة معينة يبدأ فيها لونه بالاحمرار ، ثم بزيادة الدرجة يصل الجسم إلى درجة التوهج ، مما يدل على أن درجة الحرارة تتحكم في طول الموجة الضوئية المشعة من الجسم ، فتقل أطوال هذه الموجات كلما ارتفعت درجة الحرارة .

وتستخدم هذه الخاصية في قياس درجات الحرارة الشديدة الارتفاع ، كما في مواقد المصانع والأفران الآلية. ويطلق على الجهاز المستخدم لذلك بالبيرومتر الضوئي او بيرومتر الفتيل المختفي .

يتركب البيرومتر الضوئي كما في الشكل (4.4) من تلسكوب يوجد بداخل قصبته مرشح ضوئي أحمر اللون ، ومصباح كهربائي صغير يتصل بدائرة كهربائية مكونة من بطارية و أميتر ومقاومة متغيرة . عند النظر في الجسم الساخن من خلال تلسكوب يظهر مجال الرؤية مضيئاً باللون الأحمر ، وذلك بالنسبة لوجود مرشح أحمر اللون في طريق الأشعة الصادرة من الجسم .

أما إذا أمررنا تياراً كهربياً في فتيل المصباح ، ورفعنا شدته تدريجيا باستخدام المقاومة المتغيرة ، يبدأ الفتيل في التوهج ثم نصل إلى حد يتعذر فيه تماماً رؤية الفتيل، وذلك عندما تكون حرارة الفتيل هي نفس درجة حرارة الجسم الساخن ، وإذا زيدت شدة التيار عن ذلك يبدأ ظهور الفتيل كخط مضيء وليس كخط مظلم كما كان من قبل . ولمعايرة بيرومتر الفتيل المختفي لكي يعطي درجات حرارة مباشرة ، نستخدم درجات حرارة عيارية لأجسام ساخنة ويدرج مقياس الأميتر بدائرة المصباح ، حتى يعطي درجة الحرارة مباشرة.



شكل(4.4) البيرومتر الضوئي

مثال 4.3

ترمومتر مقاومة بلاتيني مقاومته عند درجة الصفر المئوي $6.5\,\Omega$ ، بينما مقاومته عند درجة حرارة $100^0\ C$ هي $8\,\Omega$ ، فإذا كانت درجة الحرارة في وسط ما $40^0\ C$. فكم مقدار مقاومته في هذا الوسط ؟

الحل :

من المعادلة (4.6) يتم حساب معامل التمدد الحراري α

$$R_{100} = R_0(1 + \alpha \times 100)$$
$$8 = 6.5(1 + \alpha \times 100)$$
$$\alpha = 2.31 \times 10^{-3}\ C^{-1}$$
$$R_t = 6.5 \times (1 + 2.31 \times 10^{-3} \times 40) \therefore R_t = 7.1\Omega$$

4.4 التمدد الحراري Thermal Expansion

رأينا مما سبق أن درجة الحرارة للمادة دليل على الطاقة الداخلية لجزيئاتها . وبزيادة درجة الحرارة للسائل أو الجامد تزداد طاقة جزيئاته وبالتالي تزداد سعة الهزة لها. وهذا يؤدي إلى زيادة متوسط المسافة بين الجزيء وكافة الجزيئات المجاورة له . أي أن السائل أو الجامد يتمدد عند رفع درجة حرارته ، مع بعض الاستثناءات إذ مثلاً ينكمش الماء عند تسخينه من $0.0°C$ إلى $4.0°C$. أي أن أبعاد معظم المواد خاصة الصلبة تزداد عند رفع درجة حرارتها. ولأهمية هذه الظاهرة ولتسهيل دراستها فإنا نصنفها إلى ثلاثة أنواع. وهي التمدد الطولي والتمدد المساحي والتمدد الحجمي، أي أنا نصنف تمدد المواد اعتماداً على شكلها إلى :

4.4.1 التمدد الحراري الطولي The Linear Thermal Expansion

لنفرض أن قضيباً طوله L_0 عند درجة حرارة T_0 سخِّن ليصبح طوله L عند درجة الحرارة T وعليه يكون مقدار الزيادة في طوله هي $\Delta L = L - L_0$ وقد وجد تقريباً أن الزيادة في الطول تتناسب طرداً مع الطول الأصلي L_0 وتتناسب تقريباً مع الزيادة في درجة الحرارة أي أن:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \tag{4.7}$$

وثابت التناسب α يسمى عامل التمدد الطولي Coefficient of Linear Expansion وتختلف قيمتها باختلاف المواد ويمكن إعادة كتابة المعادلة (4.7) بالصيغة:

$$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dT} \tag{4.8}$$

وذلك لتغيُّر بسيط في درجة الحرارة ويمكن كذلك إعادة كتابة المعادل (4.7) باستخدام $L\text{-}L_0$ مكان ΔL للحصول على طول القضيب بعد التسخين.

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T) \tag{4.9}$$

ولما كانت L_0 و L و ΔL كلها مقاسة بالوحدة نفسها فإن وحدة α هي "مقلوب الدرجة" (إما درجة سلزيوس أو درجة فهرنهيت) فعامل التمدد الحراري للنحاس مثلاً يُكتب بالشكل $\alpha = 1.4\times10^{-5}\,(C^0)^{-1}$. أي أن قضيباً من النحاس طوله $1.0cm$ في درجة حرارة $0.0°C$ يزداد طوله بمقدار $1.4\times10^{-5}\ cm$ إذا سخن إلى درجة حرارة $1.0°C$. ويعطي الجدول (4.2) قيم عامل التمدد الطولي لبعض المواد.

جدول (4.2) عوامل التمدد الطولي لبعض المواد

المادة	$\alpha\left(C^{0}\right)^{-1}$
الألمنيوم	2.4×10^{-5}
النحاس الأصفر	2.0×10^{-5}
النحاس الأحمر	1.4×10^{-5}
الزجاج	$(4-9)\times10^{-5}$
الفولاذ	1.2×10^{-5}
الكوارتز المصهور	0.04×10^{-5}

مثال 4.4

قضيب من الحديد طوله $200.0m$ عند درجة الصفر المئوي. احسب الزيادة في طوله إذا سُخّن إلى درجة $100.0°C$. علماً بأن عامل التمدد الطولي للحديد يساوي $1.5\times10^{-5}\left(C^{0}\right)^{-1}$.

الحل:

من المعادلة (4.7) نحسب الزيادة في الطول:

$$\Delta L = (200.0m)\left(1.0\times10^{-5}\left(C^{o}\right)^{-1}\right)\left(100.0^{0}C\right)$$
$$= 0.2m$$

مثال 4.5

أسطوانة من النحاس كان قطر قاعدتها $10.0\ cm$ عند تسخينها إلى $150.0^{0}C$.

عين درجة الحرارة التي يجب أن تصلها الأسطوانة من أجل إنقاص قطر القاعدة إلى $9.95\ cm$.

الحل:

من العادلة (4.7) لدينا

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L}$$

وبالتعويض فإن :

$$\Delta T = \frac{(9.95 - 10.0)cm}{(2.0 \times 10^{-5} / C^{\circ}) \times (10.0cm)} = -250^{0} C$$

لكن

$$T = T_0 + \Delta T$$

إذن

$$T = (150.0 - 250.0)^{0}C = -100.0^{0}\ C$$

مثال 4.6

عند التخطيط لبناء الجسور يراعى التمدد لمادة الجسر مما يُلزم بتحرك قواطع عرضية تمنع الانحناء عند التمدد.

عين طول هذه القواطع عند بناء جسر طوله $0.5km$ وتتغير درجة الحرارة بين $-20.0^{0}C$ و $45.0C^{\circ}$ علماً أن مادته من الفولاذ.

الحل:

$$\Delta l = \alpha\ L\ \Delta T = \left(1.2 \times 10^{-5} (C^{0})^{-1}\right)(500.0m)\left(45.0^{0} C - (-20.0^{0})C\right)$$
$$= 0.39m == 39.0cm$$

أي أن أقصى زيادة في طول الجسر هي $0.39m$ ويراعى في القواطع ألا تقل عن هذا الطول .

4.4.2 التمدد السطحي والتمدد الحجمي

Surface and Volume Expansions

عند تسخين مادة صلبة ذات بعدين مثل الألواح المعدنية فإن التمدد يحصل لبُعدَيه ويحصل زيادة في مساحة سطحه. فإذا أخذنا لوحاً قبل التسخين طوله a_0 وعرضه b_0 وذلك في درجة حرارة T_0 فإذا سخنَّاه إلى درجة حرارة T أصبح بُعداه a و b ويُكتبا بدلالة التغيُّر في درجة الحرارة على الصور:

$$a = a_0(1 + \alpha\,\Delta T)$$

$$b = b_0(1 + \alpha\,\Delta T)$$

فإذا كانت المساحة الأصلية للوح هي:

$$A_0 = a_0\,b_0$$

فإنها تصبح بعد التسخين على الصورة:

$$A = ab = a_0 b_0\,(1 + \alpha\,\Delta T)^2$$

$$= A_0\left[1 + 2\alpha\,\Delta T + (\alpha\,\Delta T)^2\right]$$

وحيث إن α^2 صغيرة جداً فإنه يمكن إهمال الحد الثالث دون تغيُّر يُذكر في المساحة الجديدة لتصبح:

$$A = A_0(1 + 2\alpha\,\Delta T) \qquad (4.10)$$

وقياساً على المعادلة (4.7) فإن الزيادة في مساحة السطح يمكن كتابتها على الصورة:

$$\Delta A = \gamma A_0\,\Delta T \qquad (4.11)$$

حيث γ هو ثابت التناسب ويسمى عامل التمدد المساحي ويمكن إعادة كتابة المعادلة بالصيغة:

$$A = A_0(1+\gamma\,\Delta T) \tag{4.12}$$

وبمقارنة المعادلتين (4.10) و (4.12) يتضح أن:

$$\gamma = 2\,\alpha \tag{4.13}$$

أي أن عامل التمدد السطحي يساوي ضعف عامل التمدد الخطي. وبالرغم من أن البرهان تمَّ على لوح مستطيل فإن النتيجة صحيحة مع الأشكال الأخرى.

وللحصول على عامل التمدد الحجمي نتبع الخطوات في حال التمدد السطحي مع أخذ الأبعاد c_0 و b_0 و a_0 للجسم وعليه يكون:

$$V = V_0(1+\alpha\Delta T)^3$$

$$= V_0\left[1+3\alpha\Delta T+3\alpha^2(\Delta T)^2+\alpha^3(\Delta T)^3\right]$$

وإذا كان ΔT صغيراً وكذلك نعلم أن α^2 و α^3 صغيرة جداً فإنه يمكن إهمال الحدين الثالث والرابع لنجد أن:

$$V \cong V_0(1+3\alpha\Delta T)$$

أو

$$V_0+\Delta V = V_0(1+3\alpha\Delta T)$$

فإذا عرفنا عامل التمدد الحجمي β بالعلاقة

$$V = V_0(1+\beta\Delta T)$$

أي أن

$$\Delta V = V_0\beta\,\Delta T$$

وبالمقارنة نجد أن:

$$\beta = 3\alpha \qquad (4.14)$$

أي أن عامل التمدد الحجمي يساوي التمدد الطولي مضروباً في ثلاثة.

مثال 4.7

صفيحة من الألمنيوم أبعادها $2.0cm$ و $4.0cm$ عند درجة $15.0^0\,C$ ، احسب الزيادة في مساحة وجه الصفيحة عند رفع درجة الحرارة إلى $100.0^0\,C$.

الحل:

بما أن مساحة الصفيحة عند درجة $15.0^0\,C$ هي:

$$A_0 = a_0 b_0 = 8.0\ cm^2$$

وبما أن

$$a = 2.0\ cm \times \left(1.0 + 2.4\times10^{-5}\left(C^0\right)^{-1} \times 85.0C^0\right)$$

$$= 2.0041\ cm$$

و

$$b = 4.0\ cm \times \left(1.0 + 2.4\times10^{-5}\left(C^0\right)^{-1} \times 85.0C^0\right)$$

$$= 4.0082\ cm$$

فإن مساحة الصفيحة عند درجة $100.0^0\,C$ هي:

$$A = ab = 8.033\ cm^2$$

إذن الزيادة في مساحة الصفيحة عند رفع درجة الحرارة إلى $100.0^0\,C$ هي

$$A\text{-}A_0 = 0.033\ cm^2$$

مثال 4.8

وعاء زجاجي حجمه $500.0\ cm^3$ مليء بالزئبق عند درجة حرارة $30.0°C$ رُفعت درجة الحرارة إلى $80.0°C$ فتمدد الزئبق والوعاء لينسكب جزء من الزئبق. كم حجم الجزء المنسكب من الزئبق؟

الحل:

نحسب الزيادة الحقيقية في حجم كل من الوعاء والزئبق والتي يمثل الفرق بينهما الزيادة الظاهرة في حجم الزئبق وهي الكمية المنسكبة.

نعلم أن عاملي التمدد الحجمي للزجاج والزئبق هما:

$\beta_g = 5.0\times10^{-5}\left(C^0\right)^{-1}$ و $\beta_{Hg} = 18.0\times10^{-5}\left(C^0\right)^{-1}$

الزيادة في حجم الزجاج

$$\Delta V_g = \left(5.0\times10^{-5}\left(C^0\right)^{-1}\right)\left(500.0\ cm^3\right)\left(80.0^0C - 30.0^0C\right)$$
$$= 1.25\ cm^3$$

الزيادة في حجم الزئبق

$$\Delta V_{Hg} = \left(18.0\times10^{-5}\left(C^0\right)^{-1}\right)\left(500.0\ cm^3\right)\left(80.0^0C - 30.0^0C\right)$$
$$= 4.5\ cm^3$$

إذن

$$\Delta V = \Delta V_{Hg} - \Delta V_g = 3.25\ cm^3$$

ويمثل حجم الزئبق المنسكب نتيجة رفع درجة الحرارة.

مثال 4.9

سلك من الفولاذ مساحة مقطعه $10.0cm^2$. ما أقل قوة تمنعه من الانكماش

عند خفض درجة حرارته من $520.0°C$ إلى $20.0°C$.

الحل:

معادلة التمدد (في هذه الحالة ينكمش السلك) هي:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T$$

أما القوة اللازمة لمنع انكماش سلك طوله ΔL وذلك حسب معادلة المرونة فهي:

$$F = (\frac{\Delta L}{L_0})(YA) = (\alpha \Delta T)(AY)$$

وحيث إن:

$$A = 10.0\ cm^2 = 10.0 \times 10^{-4} m^2 \quad , \ Y = 2.0 \times 10^{11} Pa$$

$$\alpha = 1.2 \times 10^{-5} (C^0)^{-1} \ , \quad \Delta T = 20.0^0 C - 520.0^0 C = -500.0^0 C$$

فإن:

$$F = AY\alpha\Delta T = (10.0 \times 10^{-4} cm^2)(2.0 \times 10^{11} Pa)(1.2 \times 10^{-5} (C^0)^{-1})(-500.0^0 C)$$

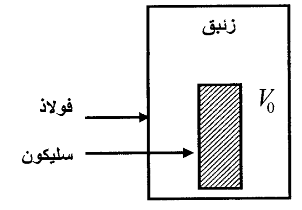
$$= -1.2 \times 10^6 N$$ (أي أن اتجاه القوة نحو الأطراف)

ويبين الجدول (4.3) عوامل التمدد الحجمي لمجموعة من المواد السائلة والصلبة.

مثال 4.10 :

أنبوب من الفولاذ يحوي زئبقاً حجمه عند درجة الصفر $10^{-5}\ m^3$. نرغب أن يظل ارتفاع الزئبق ثابت مع رفع درجة الحرارة وهذا يحصل عادة بإضافة عمود من مادة السليكون الذي لا يتمدد مع زيادة درجة الحرارة. احسب حجم عمود السليكون الذي يحفظ ارتفاع الزئبق ثابتاً.

الحل:



نفرض أن حجم عمود السليكون عند الصفر المئوي هو V_0 ، وأن حجم الزئبق هو V ، كما أن ارتفاع أنبوب الفولاذ ومساحة مقطعه على التوالي هما L_0 و A_0 .

وحيث إن الأنبوب ملئ بالزئبق والسليكون عند الصفر فإن:

$$L_0 A_0 = V + V_0 \qquad (1)$$

وبزيادة درجة الحرارة فإن حجم الزئبق ومساحة قاعدة الأنبوب ستتغير وفقا لمعادلات التمدد والقيم الجديدة هي:

$$A = A_0(1+2\alpha T) \quad \text{و} \quad V' = V(1+\beta T)$$

وحيث إننا فرضنا أن الارتفاع و حجم السليكون ثابتان فإن:

$$L_o A = V' + V_0 \quad \text{أو} \quad L_0 A_0(1+2\alpha T) = V(1+\beta T) + V_0 \qquad (2)$$

وبالتعويض من (1) في (2) فإن:

$$(V+V_0)(1+2\alpha T) = V(1+\beta T) + V_0$$

وبإعادة ترتيب المعادلة فإنها تصبح:

$$2\alpha T V_0 = V(\beta T - 2\alpha T)$$

ومنها نحسب الحجم قبل التسخين:

$$V_0 = \frac{V(\beta - 2\alpha)T}{2\alpha T} = \frac{V(\beta - 2\alpha)}{2\alpha} = \frac{10^{-5}m^3(1.8\times10^{-4} - 3.6\times10^{-5})C^{-1}}{3.6\times10^{-5}C^{-1}} = 4\times10^{-5}m^3$$

جدول (4.3) عوامل التمدد الحجمي لبعض المواد

$\beta (C^{0})^{-1}$	سوائل	$\beta (C^{0})^{-1}$	مود صلبة
0.75×10^{-5}	الكحول الإيثيلي	7.2×10^{-5}	الألمنيوم
115.0×10^{-5}	ثاني كبريت الفحم	6.0×10^{-5}	النحاس الأ[illegible]
49.0×10^{-5}	جليسرين	5.1×10^{-5}	النحاس
18.0×10^{-5}	الزئبق	$1.2\text{-}2.7\times 10^{-5}$	الزجاج
20.0×10^{-5}	الماء عند 20.0°C	3.6×10^{-5}	الفولاذ
60.0×10^{-5}	الماء عند 50.0°C	0.27×10^{-5}	إنفار
90.0×10^{-5}	البترول	$.012\times 10^{-5}$	كوارتز

4.5 كمية الحرارة Quantity of Heat

نعلم أن كمية الحرارة هي طاقة تختزنها أو تفقدها الأجسام ولها نفس وحدة القياس التي تُقاس بها الطاقة الميكانيكية من حركة ووضع وخلافه. وتُعرَّف وحدة قياس الطاقة الحرارية بأنها كمية الحرارة اللازمة لإحداث تغيير عياري متفق عليه.

وهناك وحدتان شائعتا الاستعمال لقياس كمية الحرارة .

الوحدة الأُولى: السعر أو الحريرة Calorie وهي كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحد جرام من الماء درجة مئوية واحدة. إلا أن هذا التعريف غير دقيق إذ وجد أن الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحد جرام من الماء من *90.0°C* مثلاً إلى *91.0°C* أكبر من كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحد جرام من الماء من درجة *30.0°C* إلى درجة *31.0°C* وأصبح المعروف الآن هو

"سعر الـ $15°C$" والذي تعريفه: هو كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحد جرام من الماء من درجة $14.5°C$ إلى $15.5°C$.

الوحدة الثانية: **وهي ما يقابل السعر في الوحدات البريطانيه وتسمى وحدة الحرارة البريطانية British Thermal Unit (Btu) وهي كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحد رطل من الماء من درجة $63.0°F$ إلى درجة $64.0°F$.**

أما الكيلو سعر Kcal فإنه يُستخدم عادةً لقياس طاقة المواد الغذائية.

وحيث إن الرطل يساوي $454.0g$ والدرجة المئوية الواحدة تعادل $\frac{5}{9}$ الدرجة الفهرنهايتية فإنه يمكن إيجاد العلاقة بين الوحدتين

$$1 Btu = 454.0 \times \frac{5}{9} = 252.2\ cal = 0.2522\ Kcal$$

المعادل الميكانيكي للحرارة Joule

يعبَّر عادةً عن الطاقة الميكانيكية بالجول *Joule* أو بالقدم. باوند *ft.lb* ويعبر عنها في الحرارة بالسعر أو الوحدة البريطانية

وقد وجد أن:

$$1\ Kcal = 4186\ Joules \text{ و } 1\ cal = 4.186\ Joules \text{ و } 1\ Btu = 778\ ft.\ Lb$$

ويعبر عن هذه العلاقات بالقول بأن المعادل الميكانيكي للحرارة هو 4.186Joules/calorie أو 778.0ft.Lb/Btu لكن أدق رابط بين وحدات قياس كمية الحرارة ووحدات الطاقة الميكانيكية هي اعتبار الكيلو سعر بأنه تماماً جزء من *860.0* جزءاً من الكيلو واط ساعة (kwh/860.0).

ومنها ينتج أن:

$$One\ cal = 4.18605J$$

وكذلك ينتج أن:

$$1.0Btu = 252.0cal \times 4.186J/cal = 1054.87J = 1054.87N.m$$
$$= 1054.87N \times (Lb/4.42N) \times (3.26ft/m) = 778.23ft.Lb$$

مثال 4.11

أ- وعاء به غاز طاقته *110.0 Btu*، كم تساوي طاقته بالقدم.باوند *ft-lb* ؟

ب- كم عدد السعرات الحرارية التي نحصل عليها من تسخين *1.0 g* من الماء بين درجتي 10.0^0C و 100.0^0C ؟

الحل:

أ-

$$110.0\ Btu = 778.26\frac{ft.lb}{Btu} \times 110\ .0Btu$$

$$= 85.6086 \times 10^3\ ft.lb$$

ب- عدد السعرات الحرارية التي نحصل عليها من تسخين 1.0g من الماء 90.0^0C هي.

$$90.0^0C \times 1.0g \times 1.0\ cal/g.C^0 = 90.0\ calories$$

مثال 4.12

سخان موصل بخط *110.0V* وتياره *5.0 Amp* . احسب الطاقة الحرارية الناتجة في عشر دقائق.

الحل:

نعلم أن القدرة هي معدل تغير الطاقة بالنسبة للزمن، أي أن

$$P = \frac{E}{t} = I^2R$$

حيث R هي المقاومة و I هو التيار و P هي القدرة .

لكن $R = \frac{V}{I}$

أي أن

$$P = I(IR) = IV = 5.0\ Amp \times 110.0V = 550.0\ Watt$$

$$E = P\,t = 550.0\ W \times 10.0 min \times 60.0\ sec/min$$

$$= 3.3 \times 10^5\ J \quad = 3.3 \times 10^5\ J \times \frac{1\ cal}{4.186\ J} = 7.9 \times 10^4\ cal$$

4.6 السعة الحرارية Heat Capacity

تختلف المواد من حيث كمية الحرارة المكتسبة أو كمية الحرارة المفقودة وذلك عند تغيُّر درجة حرارتها. فتبعاً لهذا التغيُّر تزيد الطاقة بزيادته وتنقص بنقصه وكذلك تزيد الطاقة المكتسبة مع زيادة كتلة المادة. فإذا كان التغير في كمية الحرارة هو ΔQ والتغير في درجة الحرارة هو ΔT وكتلة المادة هي m فإن ثابت التناسب c بينها يُعطى بالصيغة :

$$c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{4.15}$$

وهو ما عُرف بالسعة الحرارية النوعية للمادة Specific Heat Capacity أو ما يُعرف إختصاراً بالحرارة النوعية Specific Heat. أما $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$ فتسمى السعة الحرارية Heat Capacity . ويمكن أن تعرف بأنها " **كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة الجسم درجة مئوية واحدة** "

إن السعة الحرارية النوعية لمادة تساوي عددياً كمية الحرارة التي يجب أن تُقدَّم إلى وحدة الكتلة من المادة لرفع درجة حرارتها درجة واحدة. وعليه فإن السعة

الحرارية النوعية للماء هي:

$4.18605\ J/g.C^{\circ}$ $\quad$ $4186.05\ J/kg.C^{\circ}$

$1.0\ Btu\ /\ Lb.F^{\circ}$ $\quad$ $1.0\ cal\ /\ g.C^{\circ}$

ونجد هنا أنه من المناسب كتابة الطاقة الحرارية المخزونة بدلالة الجرام الجزيئي (mole) حيث يُعرَّف المول الواحد بأنه كمية من المادة كتلتها بالجرام تساوي عددياً الكتلة الجزئية M ([illegible]زيئي) ولحساب عدد الجرامات الجزيئية (المولات) n تقسّم كتلة المادة m على وزنها الجزيئي.

$$n = \frac{m}{M}$$

ومن المعادلة (4.15) ينتج أن:

$$C = Mc = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \qquad (4.16)$$

وهي ما عُرفت بالسعة الحرارية المولية.

وحيث إن $M=18$ للماء فإن الحرارة النوعية المولية للماء تساوي $18.0 cal/mol.C^{o}$ أو $75.35 J/mol.C^{o}$. ويعطي الجدول (4.4) الحرارة النوعية والحرارة النوعية المولية لمجموعة عناصر.

جدول (4.4) الحرارة النوعية والحرارة النوعية المولية مع ثبات الضغط

المعدن	النوعية $J/g.C^o$	درجة الحرارة C^o	M (g/mol)	المولية $C = Mc$ $J/mol.C^o$
بريليوم	1.97	20-100	9.01	17.7
ألمنيوم	0.91	17-100	27.0	24.6
حديد	0.47	18-100	55.9	26.3
نحاس	0.39	15-100	63.5	24.8
فضة	0.234	15-100	108.0	25.3
زئبق	0.138	0-100	201.0	27.7
رصاص	0.130	20-100	207.0	26.9

إذا كانت السعة الحرارية النوعية ثابتة مع تغيُّر درجة الحرارة من T_1 إلى T_2 فإن كمية الحرارة المعطاة لجسم كتلته m تعطى بالمعادلة .

$$Q = mc\,(T_2 - T_1) \qquad (4.17)$$

وكذلك إذا اعتبرنا السعة الحرارية المولية ثابتة فإن

$$Q = nC\,(T_2 - T_1) \qquad (4.18)$$

لكن في الواقع إن السعات الحرارية تتغير تبعاً لتغير درجات الحرارة. وعليه فإن كمية الحرارة تكتب بالصيغ

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT \qquad (4.19)$$

$$Q = n\int_{T_1}^{T_2} C\,(T)\,dT \qquad (4.20)$$

حيث c هنا هي الحرارة النوعية الحقيقية وكذلك C هي الحرارة النوعية المولية الحقيقية. وعليه فإن المعادلتين (4.17) و (4.18) هما حالتان خاصتان من المعادلتين (4.19) و (4.20).

مثال 4.13

أُسقط جسم كتلته $1000.0g$ رأسياً ولمسافة $10.0m$ ،إذا حولت كل طاقة الجسم المختزنة إلى حرارة ، احسبها وقدرها بالأرج والسعر.

الحل:

الشغل المبذول

$$W = 1.0\ kg \times 9.8\ ms^{-2} \times 10m$$

$$= 98.0J$$

$$98.0J = \frac{98.0J}{4.186\ J.cal^{-1}} = 23.4\ cal$$

$$98.0J = \frac{98.0J \times 10.0^7 erg}{1.0\ J} = 9.8 \times 10^8 erg$$

مثال 4.14

تسير رصاصة بسرعة 100.0m/s لتصطدم بقالب من الخشب لتسكن فيه . ما الزيادة في درجة حرارة الطلقة عند سكونها ؟

الحل:

نعتبر أن الطاقة الحركية للرصاصة قد تحولت إلى طاقة حرارية ومنه فإن:

$$Q = \frac{1}{2}mv^2 = mc\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{v^2}{2c} = \frac{(100.0)^2}{2.0 \times 130.0} C^\circ = 38.5^\circ C$$

مثال 4.15

مصباح غازي يعمل بالبنزين يبعث إضاءة تعادل إضاءة لمبة كهربية قدرتها 40.0W افرض أن كفاءة المصباح لتحويل الحرارة إلى ضوء تعادل كفاءة اللمبة الكهربية .كم من البنزين يتم استهلاكه في ساعة واحدة ؟

الحـل:

كمية الطاقة الناتجة في ساعة هي:

$$Q = Pt = 40.0J/s \times 3600.0s = 1.44 \times 10^5 J$$

لكن الطاقة اللازمة لإحراق واحد جرام من البنزين هي $4.6 \times 10^4 j/g$

إذن كتلة البنزين المحترقة في ساعة هي:

$$m = \frac{Q}{Q1} = \frac{1.44 \times 10^5 J}{4.6 \times 10^4 J/g} = 3.13g$$

مثال 4.16

تتغير السعة الحرارية المولية لمادة عند ضغط ثابت وفقاً للصيغة:

$$C_p = 20.0J/mole.K + \left(2.0 \times 10^{-6} j/mole.K^3\right)T^2$$

احسب كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة 20.0 mole من $0.0°C$ إلى $10.0°C$.

الحـل:

$$Q = 20.0\int_{273}^{283}\left(20.0J/mole.K + 2.0 \times 10^{-6} J/mole.K^3\ T^2\right)dT$$

$$= 20.0 \times \left[20.0T + 2.0 \times 10^{-6} T^3/3\right]_{273}^{283} J = 20.0[200. + 1.55]J = 4030.92\ J$$

مثال 4.17

كوب مادته من النحاس وكتلته $0.1kg$ ودرجة حرارته $20.0°C$ مليء بالماء الساخن الذي كتلته $0.2kg$ ودرجة حرارته $80.0°C$. احسب درجة حرارتهما بعد حصول الاتزان الحراري.

الحل:

لحل كافة المسائل من هذا النوع فإننا نعتمد مبدأ أن كمية الحرارة المفقودة من الأجسام الساخنة تساوي كمية الحرارة التي اكتسبتها الأجسام الباردة مع إهمال الجزء المفقود في الوسط المحيط بها.

الحرارة المفقودة من الماء = الحرارة المكتسبة للكوب

$$Q_{CU} = Q_w$$
$$Q_{CU} = m_{cu}\, c_{cu}(T - 20)$$
$$Q_w = m_w\, c_w\, (80 - T)$$

حيث T هي درجة الحرارة النهائية . إذن

$$\therefore (0.2\ kg)\ (4186\ J/kg.C)\ (80 - T)$$
$$= (0.1\ kg)\ (390\ J/kg.C)\ (T - 20)$$
$$\therefore 66976 - 837.2 = 39T - 780$$
$$T = 77.33\ °C$$

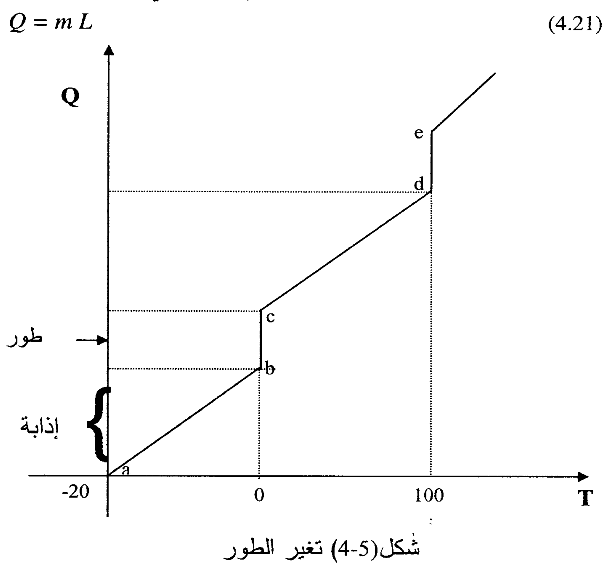
4.7 تغيُّر الطور للمادة Change of Phase

إن كلمة الطور المستعملة هنا تدل على حال المادة من صلابة أو سيولة أو غازية. فالماء يكون سائلاً في الظروف العادية ويكون صلباً ، ثلجاً ، عند فقده لجزء كبير من حرارته ويكون بخاراً بامتصاصه كمية إضافية من الحرارة. ومعظم المواد يمكنُ أن توجد في هذه الأطوار الثلاثة إذا تحققت لها شروط مناسبة من ضغط ودرجة حرارة. ويصاحب الانتقال من طور إلى آخر امتصاص أو تحرير كمية من الحرارة مصحوباً

بتغيير في حجم المادة. وكمثال نفرض أننا أخذنا جليداً عند درجة حرارة - $20.0°C$ ونبدأ في رفع درجة حرارته بإيصاله بمصدر ثابت للطاقة فنلاحظ تناسباً طردياً بين كمية الحرارة الممتصة ودرجة الحرارة. وهذا يظهر في الشكل (4.5) ممثلاً بالجزء ab إلى أن نصل إلى درجة الصفر المئوي.

وعند الصفر يظهر بعض الماء وباستمرار الخلط والتسخين نلاحظ زيادة الماء مع ثبات درجة الحرارة عند الصفر إلى أن يتحوَّل كامل الثلج إلى ماء (وهذا يمثله الجزء bc من الشكل) ونقول إن عملية الذوبان هي تغيُّر للطور من الصلب إلى السائل. وهذه الحالة تستهلك جزءا من الطاقة يسمى **الطاقة الكامنة للانصهار** Latent Heat . فإذا فرضنا أن L ترمز لكمية الطاقة اللازمة لتحويل مادة كتلتها الوحدة من طور إلى طول آخر، فإن كمية الحرارة اللازمة لتحويل جسم كتلته m هي Q

$$Q = m L \tag{4.21}$$



شكل(5-4) تغير الطور

بعد ذلك تعود الحرارة إلى الارتفاع وبمعدل ثابت (وهذا يمثله الجزء cd) ولكن هذا المعدل أبطأ من السابق أي أننا نحتاج إلى طاقة أكبر لرفع درجة حرارة جرام من الماء من تلك التي نحتاجها لرفع درجة حرارة واحد جرام من الثلج درجة واحدة وذلك أن الحرارة النوعية للماء أكبر من الحرارة النوعية للثلج. وعند بلوغ درجة الحرارة إلى $100.0°C$ "النقطة d" يبدأ الماء في الغليان وتبقى درجة الحرارة ثابتة حتى يتبخر كل الماء وهذا تغيُّر آخر في الطور يمثله الجزء de من الشكل . ونسمي كمية الحرارة اللازمة لتحويل الماء عند $100.0°C$ إلى بخار عند نفس الدرجة بالحرارة الكامنة للتبخير. إذا حجز بخار الماء فهذا يحتاج إلى وعاء كبير ومغلق فإن عملية التسخين وارتفاع درجة الحرارة تستمر ويمثلها الجزء ef من الشكل . هذا ويعطي الجدول (4.5) قائمة ببعض المواد مصحوبة بدرجات الحرارة التي يتم عندها الانصهار والغليان وكمية الحرارة اللازمة لذلك.

جدول 4.5 درجات الحرارة للانصهار والغليان وكمية الحرارة اللازمة لعمليتي الانصهار والغليان لكل مادة

المادة	درجة حرارة	الحرارة اللازمة	درجة حرارة	الحرارة اللازمة
الهيدروجين	-259.31	58. 6	-252.86	452.0
النتروجين	-209.97	25.5	-195.81	201.0
الأكسجين	-218.79	13.8	-182.97	213.0
الزئبق	-39.0	11.8	357.00	272.0
الماء	0.0	335.0	100.00	2256.0
الكبريت	119.00	38.1	444.60	326.0
الرصاص	327.3	24.5	1750.00	871.0
الفضة	960.8	88.3	2193.00	2336.0
الذهب	1063.00	64.5	2660.00	1578.0
النحاس	1083.00	134	1187.00	5069.0

مثال 4.18

احسب الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة $2.0g$ من الثلج من -20.0^0C إلى ماء عند درجة 25.0^0C.

الحل :

$$Q = m\left[c_{ice}\Delta T_1 + L + c_w \Delta T_2\right]$$

$$= 2.0\times10^{-3}kg\begin{bmatrix}2000.0J/kg.C^0\left(0.0-(-20.0)\right)+33.5\times10^4J/kg\\+4186.0J/kg.C^0\left(25.0^0-0.0^0\right)\end{bmatrix}$$

$$= 959.3.0J$$

مثال 4.19 :

ما السرعة التي يجب أن تتحرك بها رصاصة درجة حرارتها الابتدائية $30.0^\circ C$ وذلك ليتم إذابتها بالكامل عند اصطدامها بصفيحة من الفولاذ ؟ ، علما أن درجة حرارة الإذابة $430.0^\circ C$ والحرارة النوعية لمادتها $0.031cal/g.C^\circ$. والحرارة الكامنة $5.0cal/g$

الحل :

نعتبر أن طاقة الحركة للرصاصة قد تحولت إلى طاقة رفعت درجة الحرارة إلى 430.0^oC وكذلك إلى طاقة إذابة ، أي أن:

$$K = Q_1 + Q_2$$

حيث

$$Q_1 = mc(T_2 - T_1) = m(0.031cal/g.C^\circ)(430.C^\circ - 30.0C^\circ) = 12.4m(cal/g)$$

و

$$Q_2 = mL = 5m(cal/g)$$

و بالتعويض فإن :

$$\frac{1}{2}mv^2 = m(12.4 + 5.00)cal/g$$

إذن

$$v^2 = 34.8 \times 4.186J/10^{-3}kg = 145672.8m^2/s^2$$

وبأخذ الجذر فإن :

$$v = 381.0m/s$$

مثال 4.20 :

مسعّر من النحاس كتلته $320.0g$ يحوي ثلجاً كتلته $60.0g$ ودرجة حرارتهما هي الصفر . أُرسل تيار بخاري درجة حرارته $100.0^\circ C$ وكتلته $15.0g$ داخل المسعر . ما هي الدرجة النهائية للمسعر ومحتوياته ؟

الحل :

من السهل في هذه المسألة التأكد من أن الثلج قد ذاب بالكامل ، كذلك يسهل التحقق من أن البخار قد تكثف بالكامل . وعليه نبحث عن درجة الحرارة النهائية بين الصفر المئوي والمائة درجة .

نعلم أن

الطاقة المكتسبة = الطاقة المفقودة

أو $\qquad Q_{ice} + Q_{can} = Q_{stream} \qquad (1)$

حيث

$$Q_{ice} = m_{ice}[L + c_w(T - 0.0^\circ C)] = 60.0[80 + 1.0(T - 0.0^\circ C)cal = (4800 + 60.0T)cal$$

$$Q_{can} = mc\Delta T = 320.0 \times 0.093(T - 0.0^\circ C) = (29.76T)cal$$

$$Q_{stream} = mL + mc\Delta T = 15.0g \times 539\frac{cal}{g} + 15.0g \times \frac{1cal}{gC^{\circ}}(100.0^{\circ}C - T) = 7985cal - (15.0T)cal$$

حيث mL هي الحرارة الكامنة لبخار الماء. وبالتعويض عن Q_{ice} و Q_{can} و Q_{stream} في (1) فإن:

$$4800cal + 60.0T + 29.76T = 8085cal + 1500cal - (15.0cal / C^{\circ})T$$

ومنها فإن:

$$T = 45.7^{0}C$$

مســائل

1- يدور قمر صناعي كتلته $2000kg$، مصنوع من الألمنيوم، حول الأرض بسرعة $3200.0km/h$. احسب الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارته إلى 600.0^0C وقارنها بطاقة حركته.

2- وعاء به $250.0g$ من الماء عند درجة الصفر المئوي. غُمِرت به أسطوانتان من النحاس والرصاص كتلة كل منهما $1.25kg$. احسب درجة الحرارة النهائية إذا فرضنا عدم وجود فقد حراري عبر الوعاء.وكانت درجة حرارتهما 100.0^0C .

3- ترمومتر كتلته $5.5g$ وحرارته النوعية $0.2cal/g.C^o$ وقراءة حرارته $15.0^\circ C$. غُمر تماماً في ماء كتلته $300.0g$ لتنخفض درجة حرارته إلى $44.5^\circ C$. كم كانت درجة حرارة الماء قبل غمر الترمومتر ؟

4 – ملئ خزان سيارة سعته $100L$ تماماً عند درجة $40\ ^\circ F$ قبل أن تنتقل السيارة إلى مكان درجة حرارته $85\ ^\circ F$. احسب كمية الفاقد من البنزين نتيجة تمدده علماً بأن عامل التمدد الحجمي للبنزين هو $0.0012\ /\ C^\circ$.

5 – أنبوب من النحاس يحوي زئبقاً . عند درجة $20.0C^\circ$ كان حجم الزئبق $10^{-4}\ m^3$. نرغب أن تظل مساحة القاعدة ثابتة مع رفع درجة الحرارة إلى الدرجة T وهذا يحصل عادة بإضافة عمود من مادة السليكون الذي لا يتمدد مع زيادة درجة الحرارة (انظر مثال 4.10) . احسب حجم عمود السليكون .

6- أ- قارن السعة الحرارية $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)$ لكتل متساوية من الماء و الفولاذ والنحاس.

ب- قارن السعة الحرارية لأحجام متساوية من الماء ، الفولاذ ، والنحاس.

7- إذا تغيرت السعة الحرارية المولية عند ضغط ثابت وفقاً للصيغة التجريبية الآتية

$$C_P = 27.2\ J/mol.k + \left(4.0\times10^{-3} J/mol.k^2\right)T$$

فاحسب كمية الحرارة اللازمة لتغيير درجة 10.0 mole من 20.0^0C إلى $520.0°C$.

8- يندفع الماء بمعدل $3.0\ m/s$ من ارتفاع $100.0\ m$. احسب أقصى فرق بين درجتي الحرارة للماء عند قمة وقاع مصب الماء.

9- عند درجات الحرارة المنخفضة تتغير درجة حرارة الملح الصخري حسب قانون ديبي

$C = k\frac{T^3}{T_0^3}$ حيث $k = 1940.0\ J/mol.k$ و $T_0 = 281.0K$

أ- كم نحتاج من الحرارة لرفع درجة $5.0\ mole$ من الملح من $10.0K$ إلى $60.0K$ ؟

ب- كم متوسط الحرارة النوعية المولية في هذه الحالة ؟

ج- كم القيمة الفعلية للحرارة النوعية المولية عند درجة حرارة $60K$ ؟

10- أخرجت قطعة من النحاس كتلتها 80.0g من فرن، ثم أسقطت في وعاء زجاجي كتلته 320.0g وبه ماء كتلته 200.0g ، لترتفع درجة حرارة الماء بمقدار $16.0^\circ C$. احسب درجة حرارة الفرن.

11- كرة من الرصاص كتلتها $0.5\ kg$ ودرجة حرارتها $100.0^\circ C$ وُضعت في ثُقب داخل كتلة من الثلج. إذا كانت سعة الحرارة النوعية للرصاص هي 0.03 $J/kg.C^o$ فاحسب كتلة الثلج المذابة.

12- مكعب من الثلج كتلته $250.0\ kg$ وضع في ماء كتلته $640.0\ kg$ ودرجة حرارته $25.0^\circ C$. صف حالة الخليط بعد الوصول إلى حالة الاتزان.

13- أُضيفت قطعة من الثلج كتلتها $100.0g$ عند درجة حرارة $0.0^\circ C$ إلى $400.0g$ من الماء عند درجة حرارة $35.0^\circ C$. كم درجة الحرارة النهائية مع إهمال الفقد الحراري ؟

14- اُستخدمت ماكينة قدرتها $100.0hp$ لرفع درجة حرارة $100.0kg$ من الماء. احسب الزمن اللازم لرفع درجة حرارة الماء 10.0^0 C .

15- لدينا ثلاثة سوائل مختلفة لها نفس الكتل حفظناها على التوالي عند درجات الحرارة 15.0°C ، 22.0°C ، 29.0°C . قمنا بخلط السائلين الأول والثاني لنحصل على درجة حرارة اتزان قدرها $18.0^\circ C$ ثم قمنا بخلط السائلين الثاني والثالث لنحصل على درجة اتزان قدرها 25.0°C . كم درجة حرارة الاتزان لو قمنا بخلط السائلين الأول والثالث ؟

16- احسب كمية الحرارة اللازمة لتحويل 25.0kg من الثلج عند درجة حرارة 10.0°C - إلى بخار عند 100.0°C .

17- في تجربة لحساب المكافئ الميكانيكي الحراري حصلنا على البيانات الآتية مقاومة الملف 55.0 ohms ، الجهد المستخدم 110.0V ، كتلة الماء 153.0g ، كتلة المسعر 60.0g ، الحرارة النوعية للمسعر 0.1 cal/g.C ، وزمن مرور التيار 75.0s ، درجة حرارة الماء الابتدائية *10.0°C* ودرجته النهائية 35.0°C . احسب المعادل الميكانيكي للحرارة (كم يساوي واحد سعر حراري جولاً ميكانيكياً) ؟

18- وعاء ذو كتلة صغيرة جداً به *g* 400.0 من الماء عند درجة حرارة 50.0°C . كم جرام من الثلج درجة حرارته 15.0°C- يجب إضافته إلى الماء لتصل درجة الحرارة النهائية 20.0°C ؟

19- أُضيف 0.30 kg من الثلج درجة حرارته 20.0°C- إلى مسعر يحوي 1.0kg من الماء درجة حرارته 25.0°C ، إذا كان المسعر من النحاس وكتلته 300.0g . فاحسب درجة الحرارة النهائية.

20- مسعر من النحاس كتلته 320.0g يحوي 50.0g من الثلج عند درجة الصفر. مُرر عليه بخار درجة حرارته 100.0°C ، إذا علمت أن الثلج ذاب بالكامل وإن البخار تكثف بالكامل. احسب درجة الحرارة النهائية للمجموعة.

21- سلك من النحاس الأصفر نصف قطر مقطعه 8.0 cm عند درجة حرارة 180.0^0 C برد لتصل درجة حرارته النهائية 120.0^0C- .

احسب نصف قطر مقطعه بعد التبريد.

الباب الخامس

انتقال الحرارة

Heat Transfer



انتـقال الحـرارة Heat Transfer

تنتقل الحرارة بين وسطين أحدهما ساخن والآخر بارد بإحدى الطرق الثلاث الآتية :

1- التوصيل الحراري Thermal Conduction.

2- الحمل الحراري Thermal Convection .

3- الإشعاع الحراري Thermal Radiation.

5.1 انتقال الحرارة بالتوصيل Thermal Conduction

عند تلامس وسطين مختلفي درجة الحرارة يتم انتقال الحرارة بفعل جزيئات الوسطين. فمن المعروف أن طاقة حركة الجزئ تتناسب طرداً مع درجة الحرارة. وحيث إن الجزيئات مرتبطة ببعض فإنه عند تسخين جزيء تزداد طاقة حركته فينتقل جزء من طاقته إلى الجزيء المجاور وهكذا بالنسبة لبقية الجزيئات المجاورة الأخرى وتنتشر بذلك الحرارة من جانب ساخن إلى آخر بارد.

وقد وجد عملياً أن كمية الحرارة المنتقلة خلال طبقة من المادة تتناسب طرداً مع :

1– مساحة السطح الذي تمر عبره الحرارة A.

2– الفرق بين درجتي حرارة وجهي الطبقة T_2 و T_1.

3- زمن مرور الحرارة بين الوسطين t .

4– مقلوب سمك الطبقة L^{-1} .

أي أن:

$$Q = KA\frac{T_2 - T_1}{L}t \qquad (5.1)$$

حيث تسمى النسبة $\frac{T_2 - T_1}{L}$ بالميل الحراري داخل المادة، أما ثابت التناسب K فهو عامل التوصيل الحراري Thermal Conductivity وله الوحدة $J/m.C^o.s$ أما معدل التدفق الحراري أو ما يعرف بالتيار الحراري Thermal current فيكتب بالصيغة:

$$H = Q/t = KA\frac{T_2 - T_1}{L} \qquad (5.2)$$

وله وحدة J/s .

عندما لا يكون السطحان متوازيين أو عندما لا تتغير درجة الحرارة بانتظام فإن المعادلة (5.2) تطبق على سطح رقيق وبالصيغة:

$$H = -KA\frac{dT}{dx} \qquad (5.3)$$

والإشارة السالبة تعني أنه بزيادة درجة الحرارة في اتجاه زيادة x فإن التدفق الحراري يكون في اتجاه نقص x (علماً بأن dT و dx موجبتان). ويعطي الجدول (5.1) قيم عامل التوصيل الحراري لكل من الوحدات الدولية SI والوحدات المشتقة cgs مع أخذ السعر **وحدة قياس الطاقة في حالة الوحدات المشتقة.**

وعليه فإن المادة التي قيم معامل التوصيل الحراري لها كبير فإن التوصيل الحراري أو التدفق الحراري لها يكون عالياً والعكس صحيح.

مثا ل 5.1

أُستخدم صندوق سمكه $5.0cm$ ومساحة سطحه $1.0m^2$ وعامل التوصيل له $0.015\ J/m.s.C^o$ لحفظ ثلج عند درجة الصفر المئوي. احسب كمية الثلج الذائبة في

يوم كامل علمًا بأن درجة الحرارة الخارجية $35.0^\circ C$.

الحل:

معدل تدفق الحرارة إلى الصندوق

$$H = (0.015 J/m.s.C^o)(1.0m^2)(\frac{35.0C^o}{0.05m}) = 10.5\ J/s$$

كمية الحرارة التي امتصها الثلج في يوم كامل هي:

$$Q = Ht = 10.5 J/s \times (86400.0s) = 9.07 \times 10^5 J$$

لكن الحرارة الكامنة لإذابة الثلج هي $335.0\ J/g$ أي أن:

$$m = \frac{Q}{L} = 2708.1g = 2.71kg$$

جدول (5.1) معامل التوصيل الحراري (k) لبعض المواد

$cal.s^{-1}cm^{-1}.(C^{o})^{-1}$	$J.s^{-1}.m^{-1}C^{o-1}$	المعدن
0.49	205.0	ألومنيوم
0.92	385.0	نحاس
0.083	34.7	رصاص
0.97	406.8	فضة
0.12	50.2	فولاذ
0.020	8.3	زئبق
0.0015	0.62	الآجر الأحمر
0.0001	0.042	الفلين
0.002	0.83	الزجاج
0.004	1.67	الجليد
0.0001-0.0003	0.042-0.126	الخشب
0.000057	0.024	هواء
0.000039	0.016	أرجون
0.00034	0.14	هيليوم
0.00033	0.14	هيدروجين
0.000056	0.023	أكسجين

مثال 5.2

سلكان الأول من النحاس وطوله 20.0cm والثاني من الفولاذ وطوله 10.0cm ومساحة المقطع لهما متساوية رُبطت نهايتا السلكين ببعضهما بينما وضع طرف النحاس الآخر في الثلج عند الصفر والطرف الآخر للفولاذ في ماء يغلي.

1-احسب درجة حرارة نقطة اتصال السلكين .

2-احسب كتلة الثلج الذائب في الساعة الواحدة .

الحل:

1 - نعلم أن معدل التدفق عند مكان تلامس السلكين متساوٍ

أي أن

$$H_{cu} = H_{st}$$

ومنه فإن:

$$\frac{k_s A(100.0^o C - T)}{L_s} = \frac{k_c A(T - 0.0^0 C)}{L_c}$$

وبالتعويض بعد القسمة على A نحسب درجة الحرارة المطلوبة

$$\frac{50.2 J/s.m.C^0 (100.0 - T)}{0.1m} = \frac{385.0 J/s.m.C^o T}{0.2m}$$

وهي معادلة بمجهول يتم حسابه ويساوي $20.7^o C$ ولحساب التيار الحراري فإنه يمكن التعويض عن T في أي منهما لنجد أن:

$$H_s = H_c$$

$$H_s = \frac{50.2 J/s.m.C^0 \times (100 - 20.7((A)}{0.1}$$

$$= (795.0 \text{ A})\text{J/s}$$

$$\text{H}_s = \frac{385.0 J/s.m.C^{\circ} \times 20.7 C^0}{0.2} A$$

$$= (795.0 \text{ A})\text{J/s}$$

2- لمعرفة كتلة الثلج الذائب في ساعة فإننا نستخدم المعادلة:

$Q = mL$ ومنها فإن:

$$m = \frac{Q}{L} = [\frac{795.0A \times 3600.0}{3.35 \times 10^5}]kg \cong [8.5A]kg$$

وبمعرفة مساحة المقطع تحسب كتلة الثلج.

مثال 5.3

غلاية سمكها $1.5cm$ تبخر منها $10.0kg$ من الماء من كل $1.0m^2$ في الساعة. احسب فرق درجتي الحرارة بين جانبي المعدن. علماً بأن عامل التوصيل الحراري للمعدن هو $63.0J/s.m.C^o$ والحرارة الكامنة لتبخير الماء هي $22.6 \times 10^5 J/kg$.

الحل:

كمية الحرارة التي تنتقل بالتوصيل بعد وصول الماء إلى درجة الغليان هي:

$$Q = kA\frac{\Delta T}{L}t$$

وتعادل الحرارة اللازمة لتبخير الماء

$$Q = mL = 10.0\ kg \times 22.6 \times 10.0^5 J/kg$$
$$= 22.6 \times 10^6\ J$$

$$\therefore\ kA\frac{\Delta T}{d}t = 22.6 \times 10^6 J$$
$$\Delta T = 1.5^0 C$$

مثال 5.4

أُستخدمت مرآة مقعرة مساحتها $0.8m^2$ لتجميع أشعة الشمس واستخدامها في التسخين . احسب الزمن اللازم لرفع درجة حرارة واحد لتر من الماء من 20.0^0C

إلى درجة الغليان ، علماً بأن المرآة قادرة على تحويل %70 من الطاقة الشمسية الواصلة إليها إلى الماء وأن معدل القدرة الواصلة إلى الأرض هو $5.5\times10^2\ W/m^2$.

الحل:

القدره الواصلة إلى المرآة

$$P = (5.5\times10^2\ W/m^2)(0.8m^2) = 440.0\ W$$

وحيث إن مايحول إلى طاقة حرارية تصل الماء هو %70 فإن:

$$H = 0.7\,P = 308.0\ W$$

نعلم أننا نحتاج إلى $4186.0\ J$ لرفع درجة حرارة واحد لتر من الماء درجة مئوية واحدة ومنه فإن كمية الحرارة التي يكتسبها الماء بارتفاع درجة الحرارة 80.0^0C هي :

$$Q = (4186.0\ J/C^0 \times (100.0\text{-}20.0)^0C) = 3.35\times10^5\ J$$

الزمن اللازم لإيصال الماء إلى درجة الغليان هو:

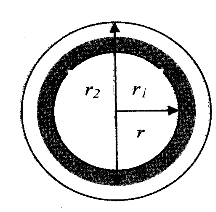
$$t = \frac{Q}{H} = \frac{3.35\times10^5 J}{308.0 J/s}$$

$$= 18.1\ min$$

مثال 5.5:

مُثلت كابنة الركاب في طائرة بأسطوانة طولها $25.0m$ ونصف قطر قاعدتها الداخلي $2.5m$ ومبطنة بعازل سمكه $3.0cm$ ومعامل توصيل مادته $10.0^{-4} cal/s.m.C^\circ$. مامعدل تدفق الطاقة للحفاظ على درجة حرارة الكابنة عند درجة 20.0^0C ؟ علماً بأن درجة الحرارة الخارجية $-40.0^\circ C$

الحل:



نعتبر شريحة من العازل على بُعد r من محور الكابنة ونعتبر سمك الشريحة dr . من المعادلة (5.3) نرى أن معدل التدفق الحراري في الثانية هو:

$$H = K\,A\,\frac{dT}{dr}$$

لكن $A = 2\pi r L$ أي أن:

$$H = 2\pi r LK\,\frac{dT}{dr}$$

ومنه فإن:

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\pi LK}{H}dT$$

وحيث إن الكابنة في حالة اتزان حراري فإن H ثابتة. وبتكامل المعادلة الأخيرة

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{2\pi LK}{H}\int_{T_1}^{T_2}dT$$

حيث درجة الحرارة عند r_1 هي T_1 و عند r_2 هي T_2 فإننا نجد

$$ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi KL}{H}(T_2 - T_1)$$

أي أن:

$$H = \frac{2.0\,\pi\,KL(T_2 - T_1)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$H = \frac{2.0\,\pi \times 10.0^{-4} \times 2500.0(20.0 - (-40.0))}{\ln\frac{253.0}{250.0}}W$$

$$= 7.9\,kW$$

5.2 الحمـل Convection

إذا انتقلت الحرارة من مكان إلى آخر بفضل المادة الحارة فإنا نسمي هذه الظاهرة بالحمل الحراري. و من أمثلتها أجهزة التدفئة ذات الماء الحار وسطح الماء الملامس لأجواء باردة إذ ينزل الماء البارد إلى أسفل ويصعد مكانه ماء أقل كثافة. إذا أجبرت المادة المسخنة على الحركة بمروحة أو مضخة سمى الحمل القسري Forced Convection. أما إذا سالت المادة بسبب اختلاف الكثافة، مثل الماء البارد، فإن الحادثة تسمى بالحمل الحر أو الطبيعي Natural Convection ولإجراء الحساب للتدفق الحراري يُكتب بالصيغة

$$H = h A \ \Delta T \tag{5.4}$$

حيث h هو عامل الحمل الحراري Thermal Convection Coefficient وA مساحة السطح أما ΔT فهو فرق درجة الحرارة بين سطح السائل ومادته الداخلية وعملية حساب h عملية معقدة لأسباب منها:

1- شكل السطح مستوياً أو منحنياً.

2- كذلك أفقياً أو رأسياً.

3- وأخيراً يكون الوسط الملامس غازاً أو مائعاً.

ولهذا وجد من التجربة أن h تختلف للمادة الواحدة بسبب وضعها فإذا أخذنا مثلاً لوحاً صلباً يلامسه هواء متحرك نجد أنه يأخذ أربع قيم مختلفة موضحة في الجدول (5.2)

جدول (5.2) معاملات الحمل في الهواء تحت ضغط جوي ثابت

المعدن	معامل الحمل h $cal/s.cm^2.C^o$
لوح أفقي وجهه إلى أعلى	$0.595\times10^{-4}(\Delta T)^{1/4}$
لوح أفقي وجهه إلى أسفل	$0.314\times10^{-4}(\Delta T)^{1/4}$
لوح عمودي	$0.424\times10^{-4}(\Delta T)^{1/4}$
أنبوب عمودي أو أفقي قطره(D)	$1\times10^{-4}(\frac{\Delta T}{D})^{1/4}$

مثال 5.6

هواء درجة حرارته 20.0^oC يهب فوق لوح ساخن من الصلب مساحته $0.375m^2$ وعامل توصيله الحراري $43.0\ J/m.s.C^o$ وسمكه $2.0cm$ ودرجة حرارة سطحه 250.0^oC فإذا كان عامل الحمل الحراري $25.0J/s.m^2C^o$.

1 – فاحسب معدل انتقال الحرارة بالحمل.

2 - احسب درجة حرارة السطح الآخر إذا علمت أن معدل الفقد بالإشعاع هو $300\ J/s$.

الحل:

معدل فقد الحرارة بالحمل هو:

$$H = h A \Delta T$$
$$= (25.0\ J/s.m^2.C)\ (0.375\ m^2)\ (250.0^o\ C - 20.0^oC)$$
$$= 2156.25\ J/s$$

كمية الحرارة المنتقلة من الوجه الآخر وبالتوصيل هي :

$$Q_{cond} = kA\,\frac{\Delta T}{L}\,t$$

وهي تساوي كمية الحرارة المفقودة بالحمل والإشعاع أي أن :

$$Q_{cond} = Q_{conv} + Q_{rad}$$

إذن

$$kA\,\frac{\Delta T}{L} = (300.0 + 2156.25)J$$

وبالتعويض عن القيم في الطرف الأيسر فإن :

$$(43.0\ J/m.s.C)^{o} \times (0.375\ m^2)\left(\frac{T-250.0}{0.02}\right) = 2456.25\ J/s$$

$$\therefore \quad T - 250.0^{o}C = 3.05^{o}C$$

$$T = 253.05^{o}\,C$$

مثال 5.7

يتدفق هواء مضغوط على مبادل حراري في سخان منزلي ، فإذا كان عامل الحمل الحراري $140.Btu/h.ft^2.^{\circ}F$ ودرجة حرارة المبادل الحراري $160.0^{\circ}F$ ودرجة حرارة الهواء $80.0^{\circ}F$ فاحسب:

أ- مساحة سطح المبادل الحراري الضرورية لإعطاء $22000\ Btu/h$.

ب- معدل انتقال الحرارة إلى وحدة المساحة من المبادل الحراري .

الحل:

أ- من المعادلة (5.4) يمكن معرفة سطح المبادل الحراري :

$$A = \frac{H}{h\,\Delta T} = \frac{22000.0\ Btu/h}{(140.0\,Btu/h.ft^2.^0F)\times(160.0-80.0)^0F}$$

$$= 1.96\ ft^2$$

ب – معدل انتقال الحرارة إلى وحدة المساحة

$$\frac{H}{A} = \frac{22000.0\ Btu/h}{1.96\ ft^2} = 11224.5\ Btu/h.ft^2$$

5.3 الإشعاع الحراري Heat Radiation

1 – انتقال الحرارة بالإشعاع الحراري Thermal Radiation

تنتقل الحرارة من الأجسام الساخنة إلى الأوساط المحيطة بها بواسطة الإشعاع دون الحاجة إلى وسط ناقل كما هو الحال بالنسبة للحمل والتوصيل . فالإشعاع الحراري له نفس طبيعة الأمواج الكهرومغناطيسية والتي يمكن أن تنتقل في الهواء أو الفراغ، ويمكن الإحساس بالإشعاع الحراري بتقريب اليد من الجسم دون لمسة. وتختلف قدرة الأجسام على امتصاص الموجات الحرارية، فالجسم الأسود أشد امتصاصاً لها من غيره ولهذا نعتبر معامل الامتصاص للجسم الأسود يساوي الوحدة وغيره من الأجسام المعامل لها أقل من ذلك وعليه فإذا عرفنا معامل الامتصاص والذي نرمز له بالحرف e بأنه **النسبة بين كمية الحرارة الممتصة وكمية الحرارة الساقطة على الجسم** فإن e تأخذ القيم بين صفر وواحد.

2– قانون ستيفان– بولتزمان The Stefan-Boltzmann Law

أظهرت التجربة أن معدل الإشعاع للطاقة الحرارية من سطح يتناسب طرداً مع

مساحة هذا السطح وكذلك يتناسب مع القوة الرابعة لدرجة الحرارة المطلقة (T_K) وكذلك فإنها تعتمد على نوع السطح أي أن معدل الإشعاع يعطى بالمعادلة :

$$H(T) = A\, e\, \sigma\, T_K^4 \qquad (5.5)$$

هذه العلاقة استنتجها ستيفان (1839-1894) J.Stafan اعتماداً على نتائج تجريبية أجراها تندال (1820-1893) J.Tyndall ثم استنتجها بولتزمان L.Boltzmann (1844-1906) استناداً على بعض الفرضيات الرياضية .

حيث σ ثابت عام يسمى ثابت ستيفان – بولتزمان Stefan-Boltzmann constant وله القيمة $\sigma = 5.6699\times10^{-8}\,w/m^2.k^4$. e هنا تمثل عامل الانبعاث emissivity وقيمتها محصورة بين الواحد والصفر $(0 \le e \le 1)$ وعند قيمتها الكبرى يكون الجسم أسود.

كما يمكن استنتاج المعادلة (5.5) بدراسة خصائص الجسم اعتماداً على قانون ڤين التجريبي Wien's Law الذي ينص على أن القدرة لكل وحدة مساحة للضوء أحادى الموجة monochromatic light المنبعثة من جسم أسود تعطى بالصيغة :

$$H(\lambda,T) = \frac{f(\lambda,T)}{\lambda^5} \qquad (5\text{-}6)$$

حيث λ هي طول الموجة للشعاع المنبعث من الجسم الأسود نتيجة تسخينه إلى درجة حرارة T و $f(\lambda,T)$ هي دالة غير معروفة وقد استنتج بلانك Planck صورة مثالية لها وذلك بعد معرفة التركيب الذري للعناصر واعتماد نموذج بوهر Bohr الذري ووجد أن:

$$f(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \qquad (5\text{-}7)$$

حيث k ثابت بولتزمان Boltzmann Constant وله القيمة

$k = 1.38066 \times 10^{-23} J/K$ و c ثابت ويمثل سرعة الضوء وله القيمة $c = 2.9979248 \times 10.0^{8} m/s$ و h هو ثابت بلانك وهو ثابت ذو أهمية بالغة في الفيزياء الحديثة وله القيمة $h = 6.62618 \times 10^{-34}$ J.s

وبإجراء التكامل على المعادلة (5.6) بعد التعويض فيها من المعادلة (5.7) نحصل على قانون ستيفان – بولتزمان Stefan-Boltzmann Law

$$H(T) = \int_0^\infty H(\lambda,T)d\lambda = \sigma T^4 \qquad (5.8)$$

وذلك لكل وحدة مساحة من جسم أسود.

وتسمى المعادلة (5.7) معادلة بلانك للتوزيع الطيفي Planck Distribution Function. هذه الدالة ، بعد التعويض بها في المعادلة (5.6) ، يمكن رسمها بدلالة طول الموجة عند درجات حرارة مختلفة كما يظهر في الشكل (5.1).وجد أن قمم المنحنيات تنزاح نحو اليسار وذلك بزيادة درجة الحرارة وقد لاحظ فين أن العلاقة الآتية صحيحة دائماً

$$\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} mK \qquad (5.9)$$

حيث λ_{max} هي القيمة لطول الموجة التي تأخذ عندها الدالة $H(\lambda,T)$ أكبر قيمة . ويمكن الحصول على المعادلة (5.9) بإجراء التفاضل للمعادلة (5.6) ثم التعويض عن λ بالقيمة λ_{max} والمساواة بالصفر أي أن:

$$\frac{\partial H(\lambda,T)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \qquad (5.10)$$

وتسمى المعادلة *(5.9)* بقانون الإزاحة *لفين* *Wien,s Displacement Law*

مثال 5.8

أ – عند أي طول موجي يبعث جسم درجة حرارته 20.0^0C أكبر أشعة حرارية؟

ب – إلى أي درجة حرارة يجب أن نسخن جسم لتقابل قمة منحنى الانبعاث له طول الموجة الحمراء ؟

ج – إذا أُعطيت الدالة $H(\lambda,T)$ بالصيغة $H(\lambda,T)=\frac{a\,e^{-\alpha/\lambda T}}{\lambda^5}$ عين قيمة λ_{max} عند درجة حرارة $1650.0K$ و $\alpha = 0.05$.

الحل:

أ –

$$T=(273.0^\circ C + 20.0^\circ C)K/C = 293.0\ K$$

$$\lambda_{max}T = 2.898\times10^{-3}mK$$

$$\lambda_{max}=\frac{2.898\times10^{-3}mK}{2930\,K}=9.89\times10^{-6}\text{m}=9.89\mu\text{m}$$

ب– نعلم أن طول موجة حمراء حوالي $650.0\ nm$ وبالتعويض بها في قانون الإزاحة فإن:

$$T=\frac{2.898\times10^{-3}mK}{6500\ \times10^{-9}m}=4460\text{K}$$

ج– للحصول على قيمة λ_{max} نفاضل الدالة $H(\lambda,T)$ ثم نساوي بالصفر

$$\left.\frac{\partial H\ (\lambda,T)}{\partial\lambda}\right|\lambda=\lambda\max\ =\ 0$$

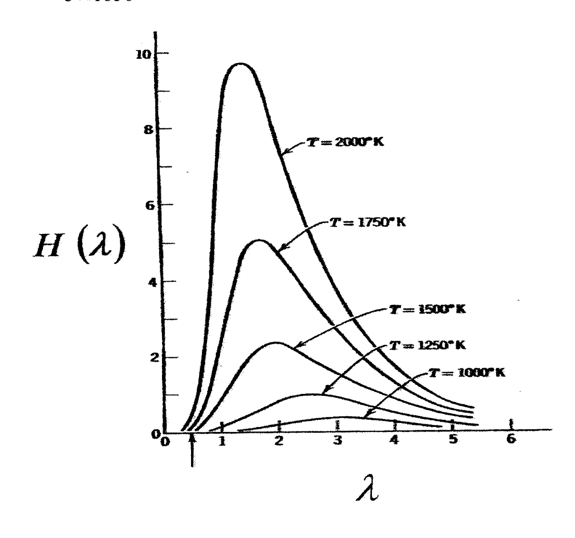
$$\therefore\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{-5}\ e^{-\alpha/\lambda T}\right]=-5\ \lambda^{-6}\ e^{-\alpha/\lambda T}+\lambda^{-5}\left(\frac{\alpha}{T\lambda^2}\right)e^{-\alpha/\lambda T}$$

$$=\ \lambda^{-6}\ e^{-\alpha/\lambda T}\left[-5+\frac{\alpha}{T\lambda}\right]$$

$$\therefore \quad -5+\frac{\alpha}{\lambda_{\max} T}=0$$

$$\therefore \quad \lambda_{\max} T=\frac{\alpha}{5}$$

$$\therefore \quad \lambda_{\max}=\frac{\alpha}{5\times 1650}=6.1\,\mu m$$



شكل (5.1) تغير الفقد الحراري بتغير طول الموجة ويظهر فيه الإزاحة لقمم المنحنيات نحو اليسار مع زيادة درجة الحرارة.

إذا وجد الجسم الساخن والذي درجة حرارته T في وسط أقل حرارة ودرجته T_o نجد أن صافي الفقد أو الكسب للطاقة هو:

$$H_{net} = A\,e\,\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) \tag{5.11}$$

فإذا كان الفرق صغيراً بين درجة حرارة الجسم والوسط فإن $T = T_0 + \Delta T$ ويصبح قانون ستيفان ـ بولتزمان على الصورة:

$$H_{net} = Ae\sigma[(T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4]$$

وبفك القوس الداخلي وإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية فما فوق $(\Delta T)^4, (\Delta T)^3, (\Delta T)^2$ فإننا نحصل على:

$$H = 4\sigma e A T_0^3 \Delta T \tag{5.12}$$

أي أن هناك تناسباً طردياً بين معدل الفقد الحراري والفرق بين درجتي حرارة الجسم والوسط وهذا هو **قانون نيوتن للتبريد** والذي هو حالة خاصة من قانون ستيفان ـ بولتزمان.

ونجد من المناسب الإشاره إلى معدل تغير درجة حرارة الجسم بالنسبة للزمن وهو شكل آخر لقانون نيوتن للتبريد والذي يعطى بالصيغة:

$$\frac{dT}{dt} = -D\left(T - T_0\right) \tag{5.13}$$

حيث T هي درجة حرارة الجسم المبرد عند الزمن $t = 0.0$ و T_0 هي درجة حرارة الوسط المحيط عند نفس درجة الحرارة و D يعتمد على نوع مادة الجسم، ويمكن معرفته من قانون الحرارة النوعية إذ أن:

$$c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

ومنه فإن:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{mc}\frac{dQ}{dt} \tag{5.14}$$

ومن المعادلتين (5.13) و (5.14) نجد أن:

$$D=\frac{1}{mc\left(T-T_0\right)}\frac{dQ}{dt} \tag{5.15}$$

مثال 5.9:

خزان ماء حجمه $1.0m^3$ ودرجة حرارته ثابتة عند $65.0^\circ C$ متصلاً بمصدر حراري قدرته $1.0kw$ ، عند قفل المصدر بدأ الخزان يبرد .

احسب الزمن اللازم لتصل درجة حرارته إلى 50.0^0C ، علماً بأن درجة حرارة الوسط المحيط هي 15.0^0C .

الحل:

نعيد كتابة المعادلة (5.13) على الصورة:

$$\frac{dT}{\left(T-T_0\right)}=-D\,dt$$

ولمعرفة الزمن نكامل هذه المعادلة:

$$\int_{65^0C}^{50^0C}\frac{dT}{\left(T-T_0\right)}=-D\,t$$

أي أن:

$$\ln\left(T-T_0\right)\Big|_{65}^{50}=-D\,t$$

وبالتعويض فإن:

$$\ln\left(50-15\right)-\ln\left(65-15\right)=\ln\frac{50}{35}=D\,t$$

والتي تعطي قيمة الزمن

$$t = \frac{0.3566}{D} \quad sec$$

ولمعرفة الثابت D لدينا $\frac{dQ}{dt} = 1\,kW$ و $m = 10^3 kg$ للماء

وبالتعويض في (5.15) نجد أن $D = 4.8 \times 10^{-3}\, s^{-1}$

وبالتعويض عنه نجد الزمن

$$t = \frac{0.3567}{4.8 \times 10^{-6} s^{-1}} = 74.314\,sec$$

مثال 5.10

لمبة كهربائية أسطوانية الشكل طولها $0.5m$ ونصف قطر قاعدتها $1.0cm$، فإذا كان معدل انبعاث الطاقة $50.0W$.فاحسب درجة حرارة اللمبة علماً بأن عامل الانبعاث لمادتها 0.4 .

الحل:

$$H = \sigma e A T^4$$

$$50.0W = (5.699 \times 10^{-8}\ W/m^2.K^4)\,(0.4)\,(0.0314m^2)\,T^4$$

ومنها نجد أن

$$T = 514.0^o K$$

مثال 5.11

صفيحة من الفولاذ مربعة طول ضلعها $10.0cm$ سُخنت إلى درجة حرارة $1000.0^o C$ إذا كان عامل الامتصاص يساوي واحد، فاحسب معدل تدفق الحرارة من الصفيحة.

الحل:

مساحة وجهي الصفيحة هي:

$$A = 2.0(0.1m)^2$$
$$= 0.02m^2$$

ودرجة الحرارة هي:

$$T = (1000.0 + 273.0)K = 1273K$$

وبالتعويض في قانون ستيفان بولتزمان

$$H = (0.02m^2)(1)(5.6699 \times 10.0^{-8}\, W.m^{-2}.K^{-4})(1273.0K)^4$$
$$= 2978.0\, W$$

مثال 5.12

كرة سوداء نصف قطرها $3.0cm$. إذا كانت الكرة في حالة اتزان مع محيطها تمتص $30.0\ kW$ من القدرة التي يشعها إليها ذلك المحيط ، فاحسب درجة حرارة الكرة؟

الحل :

بما أن القدرة التي يمتصها جسم أسود هي:

$$H = \sigma A T^4$$

فإن :

$$\left(30.0\times10^3\ W\right) = \left(5.67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4\right)\times 4\pi(0.03)^2 \times T^4$$
$$\because\ T^4 = 4.68\times10^{13}\ K^4$$
$$\therefore\ T = 2615.3\ K$$

حيث T هي درجة حرارة الوسط المحيط بالكرة وبما أن الجسم في حالة اتزان مع محيطه، فستكون له نفس درجة الحرارة.

5.4 الثابت الشمسي The Solar Constant

يعرف الثابت الشمسي أنه كمية الطاقة الحرارية التي تسقط عمودياً من الشمس على وحدة المساحة من سطح الأرض في الثانية الواحدة. ويتوقف هذا الثابت على العوامل المؤثرة مثل المكان الذي يقاس عنده أو العوامل الخارجية المؤثرة على أشعة الشمس. وقيمة هذا الثابت التقريبية هي $k = 1353.47 J/m^2.s$ ويمكن بواسطته تقدير درجة حرارة الشمس كالآتي:

نفرض أن نصف قطر الشمس R والمسافة بين الشمس والأرض هي L ومعلوم أن مساحة سطح الشمس هي $4\pi R^2$ والمساحة حول الشمس التي تتوزع عليها الطاقة المنبعثة من الشمس هي $4\pi L^2$

ومعدل إشعاع الطاقة هو

$$H = 4\pi R^2 \sigma T^4 \qquad , e = 1.0$$

كمية الحرارة الساقطة على وحدة المساحة من سطح الأرض هي الثابت الشمسي k ويساوي:

$$k = \frac{H}{4\pi L^2} = \frac{4\pi R^2}{4\pi L^2} \sigma T^4$$

إذن

$$k = \sigma \left(\frac{R}{L}\right)^2 T^4 \tag{5.16}$$

وبالتعويض عن نصف قطر الشمس بقيمته $7.0\times10^8 m$ وبعد الأرض عن الشمس بقيمته $1.5\times10^{11} m$ نجد أن درجة حرارة الشمس تقريباً

$$T^4 = \frac{k}{\sigma}\left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{1353}{5.6699\times10^{-8}}\left(\frac{1.5\times10^{11}}{7\times10^8}\right)^2 K^4$$

أي أن درجة حرارة الشمس حوالي $5805.0 K$

مثال 5.13

احسب درجة حرارة سطح الأرض على فرض أنها في حالة اتزان حراري إشعاعي مع الشمس.

الحل:

$$H_{sun} = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$$
$$= 4\pi(7.0\times10^8 m)^2(5.6699\times10^{-8} W/m^2K^4)(5805.0K)^4$$
$$= 3.96\times10^{26} W$$

معدل الطاقة التي تصل سطح الأرض هي:

$$E = H_{sun}\frac{\pi R_e^2}{4\pi L^2}$$

حيث πR_e^2 هي المساحة التي تسقط عليها أشعة الشمس عمودياً على سطح الأرض انظر الشكل (5.2)

$$E = \frac{H_{sun}}{4}(\frac{R_e}{L})^2$$

معدل الإشعاع الصادر من الأرض

$$H_{earth} = 4\pi\ R_e^4 T_e^4$$

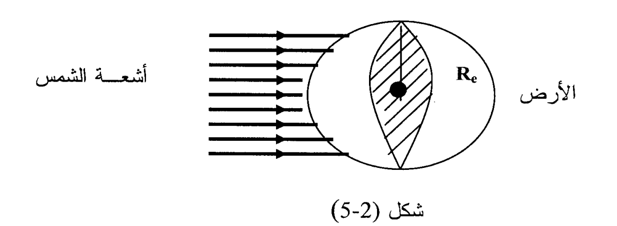
وباعتبار الاتزان الحراري بين الأرض والشمس فإن:

$$4\pi R_e^2\sigma T_e^4 = 4\pi R_s^2\sigma T_s^4\frac{\pi R_e^2}{4\pi L^2}$$

ومنها نجد أن:

$$T_e^4 = T_s^4\frac{R_s^2}{4L^2}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{T} = 5805.0\times(\frac{7.0\times10^8}{2.0\times1.5\times10^{11}})^{1/2}$$
$$= 280.5^0\mathrm{K}$$



شكل (2-5)

مســائل

1- غلايــة نـصف قطـر قاعـدتها الدائريـة $7.5\ cm$ وسمـك القاعـدة $1.5\ mm$ ، وضعت على نار لتصل درجة حرارة السطح الخارجي $102.0\ ^{o}C$ ، وكان الماء قد وصل درجة الغليان . احسب الطاقة المنتقلة عـبر القاعـدة في $10.0\ s$،معامـل التوصيل الحراري للغلاية هو $205.0.J/s.m.C^{o}$.

2- صفيحة مساحة وجهها $100.0\ cm^{2}$ وسُمكها $2.0\ cm$ ومعامل توصيلها الحراري $0.1\ J/s.m.C^{o}$ ، إذا كان فرق درجتي حرارة وجهيها $80.0^{o}\ C$ فاحسب معدل التدفق الحراري خلالها واحسب كمية الحرارة المنتقلة لمدة ساعة.

3- شريحتان من النحاس والفولاذ ، سُمك كل منهُما $1.0\ cm$ ، متلامستا الوجهين. حفظ السطح الخارجي للنحاس عند درجة حرارة $150.0^{0}\ C$ وحفظ السطح الخارجي للفولاذ عند درجة حرارة $50.0^{0}\ C$ ، احسب درجة حرارة الوجهين المتلامسين علماً بأن $K_{cu} = 2\ K_{st}$.

4- ثلاثة قضبان من النحاس و الحديد و الفولاذ ربطت معاً لتشكل حرف Y . مساحة المقطع لكل منها $3.0cm^{2}$. حفظت النهاية الحرة للنحاس عند درجة حرارة $100.0^{o}C$ وحفظت نهايتا الحديد والفولاذ الحرتان عند الصفر المئوي . أطوالها: النحاس $0.5m$ ، الحديد $0.2m$ و الفولاذ $0.15m$

1- احسب درجة حرارة النقطة المشتركة بين القضبان .

2- احسب التدفق الحراري داخل القضيب النحاسي .

5- قضيب من الفولاذ طوله $20.0cm$ ومساحة مقطعه $3.0\ cm^{2}$ سُخنت إحدى

نهايتيه إلى $30.0°C$ ، بينما تلامس النهاية الثانية مكعباً من الثلج . إذا فرضنا أن الحرارة تُنقل كاملة عبر القضيب فاحسب كتلة الثلج المذابة في 20.0 min .

6- احسب القدرة اللازمة للحفاظ على فرق درجتي الحرارة بين وجهي نافذة عند $20.0\,°C$ علماً بأن مساحة الزجاج $2.0\,m^2$ وسُمكه $3.0\,mm$.

7- كم الوقت الذي تستغرقه طبقة من الثلج سمكها $4.0\,cm$ لتتشكل على سطح غدير عندما تكون درجة حرارة الهواء $-\,6.0\,°C$ ؟ علماً بأن معامل التوصيل الحراري للثلج هو $K = \frac{4.0 \times 10^{-3} cal}{s.cm.C}$ والحرارة الكامنة هي $3.35 \times 10^{+5}\,J/kg$.

8- هواء درجة حرارته $30.0\,°C$ يهب فوق لوح ساخن معامل توصيله الحراري $205.0\,J/\,m.s.C°$ وسُمكه $2.5\,cm$ ومساحته $0.5\,m^2$ ، ودرجة حرارته $300.0\,°C$ ومعامل الحمل الحراري $30.0 J/s.m^2.C^0$.

أ- احسب معدل انتقال الحرارة بالحمل .

ب-احسب درجة حرارة السطح الآخر للوح إذا علمت أن معدل الفقد بالإشعاع هو $500.0\,J/s$.

9- وضع جسم أسود درجة حرارته $350.0\,°C$ في وعاء محاط بثلج مبرد بمعدل $0.4°C/s$ ، إذا علمت أن كتلته $100.0g$ ومساحته $25.0cm^2$ وثابت استيفان-بولتزمان له $5.667 \times 10^{-8} J/s.m^2k^4$ ، فاحسب الحرارة النوعية لمادته.

10- إذا علمت أن النسبة بين نصفي قطر مدار الأرض حول الشمس ونصف قطر الشمس هو 216 واعتبرت الشمس جسماً أسود ، فاحسب درجة حرارة سطح الشمس .

11- كرة سوداء نصف قطرها $5.0\ cm$ ودرجة حرارتها $120.0^{\circ}C$ ومعلقة في حيز مفرغ جدرانه سوداء ودرجة حرارته $35.0^{\circ}C$ ، احسب الكمية الحرارية المفقودة من الجسم في خمس دقائق .

12-كرة من الحديد مساحة سطحها $100.0 cm^2$ ودرجة حرارتها $120.0^{\circ}C$ عندما كانت موصلة بمصدر حراري قدرته 1.5kw. احسب الزمن اللازم لتبرد إلى $100.0^{\circ}C$ في وسط درجة حرارته صفر وذلك بعد إيقاف المصدر الحراري. الحرارة النوعية للحديد $460.0\ J/kg.C^{\circ}$.

13- إنسان درجة حرارة جسمه $37.0^{\circ}C$ وفي غرفة درجة حرارتها $25.0^{\circ}C$ ، إذا اعتبرنا مساحة جلده $1.5\ m^2$ وانبعاثيته 0.8 ، فاحسب كمية الحرارة التي يفقدها في 15.0 دقيقة.

14- صفيحة مساحتها $1.0 m^2$ ودرجة حرارتها ثابتة عند $100.0^{\circ}C$ يمر عليها هواء درجة حرارته $20.0^{\circ}C$ ، احسب كمية الحرارة التي تفقدها الصفيحة في نصف ساعة .

أ-إذا كانت الصفيحة عمودية. ب- إذا كانت الصفيحة أفقية.

15- سخان كهربائي مقاومة مادته 20.0Ω ويمر به تيار شدته $10.0\ A$ ، ومساحة سطحه الساخن $400.0\ cm^2$ ، احسب درجة حرارته .

16- قضيب نحاس طوله $15.0cm$. ثبتت درجة حرارة إحدى نهايتيه عند $20.0K$ ، ودهنت النهاية الأخرى بطلاء أسود ، ويواجه هذه النهاية جسم درجة حرارته $300.0K$. إذا أصبح الجسمان في حالة اتزان حراري فكم درجة حرارة النهاية السوداء للقضيب ؟

17- أنبوبة طولها $3.0m$ ونصف قطرها الخارجي $2.0cm$ غطيت بطبقة من عازل أسود سمكها $2.5cm$ وكانت درجة حرارة السطح الخارجي للعازل $600.0K$ وكانت درجة حرارة الهواء المحيط $300.0K$. احسب معدل الفقد بالإشعاع وكمية الطاقة المفقودة في ساعة.

الباب السادس

الخصائص الحرارية للمادة

Thermal Properties of Matter



6.1- الغاز المثالي The Ideal Gas

نعلم أن ذرات الغازات أكثر تباعداً من ذرات الموائع والجوامد وينتج من ذلك أن القوى بين ذراتها أضعف من غيرها وأن القوانين التي تحدد سلوك الغازات أبسط من تلك التي تحدد سلوك الموائع والجوامد.

وكان قانون بويل Boyl's Law من أول ما عرف من القوانين المفسرة للتغيرات المشاهدة في الغازات . **وينص على أنه لغاز كتلته ثابتة عند درجة حرارة ثابتة إذا غُير حجمه فإنه يتغير ضغطه تبعاً لذلك إلا أن حاصل ضربهما يبقى ثابتاً دائماً**. فإذا رمزنا للضغط المطلق بالرمز P وللحجم بالرمز V فإن:

$$V_1P_1 = V_2P_2 = \ldots = \text{constant} \tag{6.1}$$

وهذا القانون يبقى صحيحاً ما لم تقترب درجة الحرارة من تلك التي عندها يتكاثف الغاز. كذلك وجد أنه إذا بقي الضغط ثابتاً فإن الحجم يتناسب طرداً مع درجة الحرارة وهو ما عُرف بقانون شارلز ولوساك Charles and Gay Lussac Law وهذا ما أمكن تلخيصه في قانون عام أصبح يُعرف بقانون الغاز المثالي وله الصيغة:

$$PV = nRT \tag{6.2}$$

حيث n هو عدد الجرامات الجزيئية (المولات) وقد سبق تعريفها ولها الصيغة:

$$n = \frac{\text{m}}{\text{M}} \tag{6.3}$$

و m هي كتلة الغاز و M هو وزنه الجزيئي أما الثابت R فإن له نفس القيمة لكل الغازات ولهذا سمي بالثابت العام للغازات Universal Gas Constant أما قيمة R العددية فإنها تعتمد على وحدات كل من T وV وP فإذا أخذناها في الوحدات الدولية (SI Units) أو مشتقاتها فإن:

$R=8.314\ J/mol.K=8.314\times10^{7}erg/mol.K\ \ =1.99\ cal/mol.K$

أما إذا قيس الضغط بوحدة الضغط الجوي و قيس الحجم باللتر فإن:

$R = 0.0821\ l.atm/mol.K$

وغالباً ما يُكتب قانون الغازات بدلالة العدد الكلي للجزيئات N

حيث

$$n = \frac{N}{N_A} \qquad (6.4)$$

ليصبح القانون

$$PV = \frac{N}{N_A}RT$$

وله الصيغة النهائية

$$PV = N\,k\,T \qquad (6.5)$$

حيث N_A هو عدد أفوجادرو Avogadro's Number والذي يعرف بأنه عدد ذرات الكربون في 12 جراماً من الكربون C_{12} ولها القيمة $N_A = 6.023\times10^{23}\ M/mol$ و $k=\frac{R}{N_A}$ هو ثابت بولتزمان Boltzmann Constant.

مثال 6.1

غاز مثالي حجمه $100.0\ cm^3$ عند درجة حرارة 20.0^oC وضغط $100.0P_a$

أ- احسب عدد الجرامات الجزيئية (العدد المولي n).

ب- احسب عدد الجزيئات في الوعاء.

الحل:

أ- عدد الجرامات الجزيئية n هو:

$$n=\frac{PV}{RT}=\frac{(100.0P_a)(10.0^{-4}m^3)}{(8.314\ \text{J/mol.K})(293.0\text{K})}=4.11\times10^{-6}moles$$

ب- عدد الجزيئات في الوعاء هو:

$$N = nN_A = 4.11 \times 10^{-6}\ moles \times 6.023 \times 10^{23} molecules/moles$$

$$= 2.475 \times 10^{18}\ molecules$$

مثال 6.2

احسب حجم واحد جرام جزيئي من أي غازل مثالي عند درجة الحرارة والضغط القياسيين $(P=1.0atm,\ T=273.0K)$

الحل :

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1mol)(8.314\,\mathrm{J.mol^{-1}}.K^{-1})(273.0K)}{1.013\times10^{5}Pa}$$

$$= 0.0244\ \mathrm{m^3}$$

أو نستخدم اللتر مع الضغط الجوي

$$V = \frac{(1mol)(0.08207\ atm.mol^{-1}.K^{-1})(273.0K)}{1\,atm} = 22.41l = 0.0224\ m^3$$

مثال 6.3

وعاء به هواء حجمه $0.2m^3$ تحت ضغط داخلي $5.0x10^5Pa$ وعند درجة حرارة $35.0^o\,C$.

أ- احسب كتلة الهواء .

ب- احسب حجم الهواء إذا أصبح تحت درجة الحرارة والضغط القياسيين.

الحل :

أ- حيث إن الهواء خليط من الأكسجين والنتروجين وغازات أخرى فإن متوسط وزنه الجزيئي هو $28.8\ g/mol$

الضغط على الهواء داخل الوعاء هو:

$$P = P_{air} + P_{gauge}$$
$$= (1.013 \times 10^5 + 5.0 \times 10^5)Pa = 6.013 \times 10.0^5\ Pa$$

وحيث إن الكتلة تعطى بالعلاقة $m = nM$

فإننا نحسب n من القانون العام

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{6.013 \times 10^5 P_a \times 0.2 m^3}{(8.314\ \text{J/mol.k}(308\text{k})} = 46.96\ \text{mol}$$

$$m = 46.96\ mol \times 28.8\ g/mol = 1.3525\ kg$$

ب- الحجم تحت $P = 1.0\ atm$ وحرارة $T = 273\ .0K$

$$V = \frac{nRT}{P} = 1.052 m^3$$

مثال 6.4

استنتج علاقة الضغط الجوي بالارتفاع عن سطح الأرض. (للتسهيل افرض أن درجة الحرارة ثابتة مع الارتفاع. انظر المسألة 6.10 حيث درجة الحرارة متغيرة)

الحل:

نعلم من علاقات الموائع أن:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{-Ay\rho g}{A} = -y\rho g$$

أي أن:

$$\frac{P}{y} = -\rho g$$

أو

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

حيث ρ هي الكثافة وأضفنا الإشارة السالبة لتدل أن الضغط يقل بزيادة الارتفاع. ومن القانون العام للغازات لدينا

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

وكذلك

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

وبالتعويض نجد أن

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{PMg}{RT}$$

بفصل المتغيرات ثم إجراء التكامل

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{Mg}{RT} (y_2 - y_1)$$

نفرض الضغط عند $y = 0.0$ هو P_o وعليه يكون:

$$P = P_o \, e^{-Mgy/RT} \tag{6.6}$$

وللحصول على قيمة عددية للضغط على ارتفاع معين نفرض أن $y = 8882.0m$ وهي تمثل قمة ارتفاع أفيرست وبالتعويض في المعادلة (6.6) نجد أن $P = 0.333 \ atm$

أي أن الضغط عند قمة أفيرست يعادل فقط ثلث الضغط عند مستوى سطح البحر.

6.2 النموذج الجزيئي للضغط في الغاز المثالي

Molecular model for the Pressure of an Ideal Gas

للوصول إلى صيغة نحسب بها ضغط الغاز المثالي بدلالة متوسط سرعة جزيئاته نضع بعض الفرضيات التي تعين للوصول إلى ذلك:

1- نفرض أن عدد الجزيئات كبير جداً وكذلك المسافة بينها كبيرة مقارنة بأبعاد الجزيئات. أي أن حجمها صغير جداً مقارنة بحجم الوعاء.

2- حركة الجزيئات تخضع لقوانين الحركة لنيوتين لكن حركتها عشوائية بمعنى أن الجزيئات تتحرك في كل الاتجاهات و بسرعات مختلفة لكن الاحتمال متساوٍ في توزيع السرعات على المحاور الثلاثة.

3- نعتبر أن تصادم الجزيئات مع بعضها ومع الجدران تصادماً مرناً كذلك نعتبر كلاً من طاقة الحركة وكمية الحركة محافظة .

4- نعتبر القوى بين الجزيئات مهملة والقوى غير المهملة هي قوى التصادم فقط.

5- الغاز تحت الدراسة نقي أي أن الجزيئات متماثلة.

6- نعتبر الغاز مع الجدران في حالة اتزان حراري. وعليه فإن الحائط يبعث من الجزيئات ما يساوي عدد ما يمتصه .

والآن نعتبر عدد الجزيئات N وحجم الوعاء V ونعتبره هنا مكعب ضلعه d. ونعتبر جزيئاً يتحرك على أحد المحاور وليكن x ويصطدم الوجه العمودي على محور x وعليه فإن التغير في كمية الحركة هو:

$$\Delta P_x = m v_x + m v_x = 2m v_x$$

ومن أجل أن يعمل الجزيء الواحد تصادمين فإن عليه أن يقطع مسافة قدرها $2d$ في زمن قدره Δt ولكن في هذا الزمن قطع الجزيء مسافة قدرها $v_x \; \Delta t$ أي أن $\Delta t = \frac{2d}{v_x}$

وحيث إن التغير في كمية الحركة = الدفع

فإن $$F\Delta t = 2\; mv_x$$

حيث F هي القوة المؤثرة على السطح ، والتي تعطى بعد التعويض عن Δt بالآتي:

$$F = m v_x^2 / d$$

مجموع الضغط الواقع على الجدار من كل الجزيئات هو:

$$P = \frac{\sum F}{A} = \frac{m}{d^3} \sum_{i=1}^{N} v^2{}_{xi} \qquad (6.7)$$

حيث v_{x1} ، v_{x2} ، ... تمثل مركبات السرعة للجزيئات 1 ، 2 ، 3 ، .... وحيث إن متوسط $v^2{}_x$ هو

$$\bar{v}^2{}_x = \frac{v_{x1}{}^2 + v_{x2}{}^2 + ...}{N}$$

والحجم هو $V = d^3$ فإن:

$$P = \frac{Nm}{V} \bar{v}_x^2 \qquad (6.8)$$

وحيث إن مربع السرعة يعطى بدلالة مركباتها

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

وكذلك فإنه لايوجد اتجاه مفضل بالنسبة للجزيئات وعليه فإن:

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2$$

وبالتعويض عن قيمتها في المعادلة (6.7) يصبح الضغط

$$P = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{v}^2}{V} \tag{6.9}$$

الكمية Nm هي الكتلة الكلية للغاز والتي تساوي nM ومنه فإن الضغط يمكن أن يُكتب بالصورة

$$P = \frac{1}{3}\frac{nM\ \overline{v}^2}{V} \tag{6.10}$$

ويمكن إعادة ترتيب المعادلة (6.9) لتُكتب بالصيغة

$$P = \frac{2}{3}\frac{N}{V}(\frac{1}{2}m\overline{v}^2) \tag{6.11}$$

وهذه المعادلة تفيد أن الضغط يتناسب طرداً مع عدد الجزيئات لكل وحدة حجم وكذلك مع متوسط الطاقة الحركية للجزيء الواحد.

6.3 قانون تساوي توزيع الطاقة

Law of Equipartition of Energy

أثبتنا في الفصل السابق أن

$$P = \frac{2}{3}\frac{N}{V}(\frac{1}{2}m\overline{v}^2)$$

والتي تكتب بالصيغة المألوفة

$$PV = \frac{2}{3}N(\frac{1}{2}m\overline{v}^2) \tag{6.12}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة التجريبية الواردة سلفا ، معادلة (6.5)، نجد أن درجة الحرارة تعطى بالصيغة

$$T = \frac{2}{3k}(\frac{1}{2}m\bar{v}^2) \quad (6.13)$$

وبإعادة الترتيب نجد أن:

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \quad (6.14)$$

وهذا يعني أن متوسط طاقة الحركة للجزيء الواحد تساوي $\frac{3}{2}kT$.

وحيث إن

$$\bar{v}_x^2 = \frac{1}{3}\bar{v}^2$$

فإن:

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_x^2 = \frac{1}{2}kT$$

أي أن متوسط طاقة الحركة على محور x هو $\frac{1}{2}kT$ وكذلك متوسط طاقة الحركة على محور y هو $\frac{1}{2}kT$ وكذلك متوسط طاقة الحركة على محور z هو $\frac{1}{2}kT$. وهذا ما عرف بقانون توزيع الطاقة الحركية للجزيء الواحد.

الطاقة الكلية لعدد N جزيء هي (الطاقة الداخلية)

$$E = N\,(\frac{1}{2}m\bar{v}^2) = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \quad (6.15)$$

حيث استخدمنا $k = \frac{R}{N_A}$ لثابت بولتزمان و $n = \frac{N}{N_A}$ لعدد المولات في الغاز.

وهذه النتيجة مع المعادلة (6.11) تتضمن أن الضغط يعتمد فقط على عدد الجزيئات في وحدة الحجم ودرجة الحرارة. من المعادلة (6.14) نحصل على جذر متوسط السرعة v_{rms}. " Root mean square "

$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (6.16)$$

وهذه المعادلة تُظهر أن الغازات الخفيفة أسرع من الغازات الثقيلة عند نفس درجة الحرارة.

ويعطي الجدول (6.1) بعض الغازات مع جذر متوسط السرعة عند درجة حرارة واحدة

جدول (6.1) جذر متوسط السرعة عند درجة حرارة ثابتة

v_{rms} عند 20^oC (m/s)	الوزن الجزيئي (g/mol)	الغاز
1902.0	2.02	H_2
1352.0	4.0	He
637.0	18.0	H_2O
603	20.1	Ne
511.0	28.0	N_2 or CO
494.0	30.0	NO
408.0	44.0	CO_2
390.0	48.0	SO_2

مثال 6.5

وعاء حجمه $0.3m^3$ يحوي 2.0 moles من غاز الهيليوم عند درجة حرارة $2.0^o C$. اعتبر الغاز مثالياً واحسب :

أ- الطاقة الكلية الداخلية .

ب- احسب متوسط طاقة الحركة للجزيء الواحد .

الحل:

أ- نستخدم المعادلة (6.15) مع التعويض بقيمتي درجة الحرارة و الوزن الجرامي، $n = 2.0\ moles$, $T = 293.0\ k$ ،

نحصل على

$$E = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}(2moles)(8.314J/mol.K)(293.0K)$$
$$= 7.31 \times 10^{3} J$$

ب- نستخدم المعادلة (6.14)

$$\frac{1}{2}m\overline{v}^{2} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} J/k)(293k)$$
$$= 6.07 \times 10^{-21} J$$

مثال 6.6

إذا كان الوزن الجزيئي للهيليوم هو $4.0g/mol$ فاحسب جذر متوسط السرعة للذرات عند درجة حرارة $20.0\ ^{o}C$.

الحل:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{(3 \times 8.314\ J/mol.K)(293.0K)}{4.0 \times 10^{-3}\ kg/mol}}$$
$$= 1.352 \times 10^{3}\ m/s$$

6.4 السعة الحرارية لغاز مثالي

Heat Capacity of an Ideal Gas

رأينا في الفصل السابق أن الطاقة الحركية للغاز هي $E = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT$ وبزيادة درجة الحرارة فإن الطاقة الداخلية للجزيئات تزداد ونرمز للطاقة بالرمز U ليعبرعن الطاقة الداخلية بعد زيادة درجة الحرارة بالتسخين مع ثبات الحجم

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT$$

ومن القانون الأول للديناميكا الحرارية نجد أن الطاقة المكتسبة هي:

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T \qquad (6.17)$$

لكن

$$Q = n\, C_v\, \Delta T$$

حيث C_v هي السعة الحرارية المولية عند حجم ثابت و بمقارنة المعادلتين نستنتج قيمة السعة الحرارية المولية

$$C_v = \frac{3}{2}R \qquad (6.18)$$

نلاحظ أن هذه الصيغة تعطي قيمة ثابتة لـ C_v قدرها $C_v = 12.471\ J/mol.k$ وذلك لكل الجزيئات أحادية الذرة وهذه نتيجة ممتازة مقارنة بالقيم المقاسة لهذه الغازات مثل الهيليوم والأرجون انظر الجدول (6.2) وحيث إن:

$$\Delta U = Q = n\, C_v\, \Delta T$$

فإن السعة الحرارية المولية تكتب تفاضلياً بالصيغة

$$C_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \qquad (6.19)$$

والآن نفرض أن الضغط ثابت ورفعنا درجة الحرارة بمقدار ΔT نجد أن الزيادة في كمية الحرارة هي:

$$Q = n\, C_p\, \Delta T \qquad (6.20)$$

حيث C_p هي السعة الحرارية المولية عند ضغط ثابت. وحيث إن الحجم يزيد هنا فإن الشغل المبذول من قبل الغاز هو $W = P\, \Delta V$ (في الحالة السابقة كان الشغل = صفر لثبات الحجم) وعليه فإن الزيادة في الطاقة الداخلية تعطى بالعلاقة:

$$\Delta U = Q - W = nC_p\Delta T - P\ \Delta V \tag{6.21}$$

ومن قانون الغاز المثالي العام ، $PV = n\ RT$ ، فإنه في حالة الضغط الثابت يكون $P\Delta V = nR\Delta T$ وبالتعويض بها في المعادلة (6.21) نحصل على:

$$nC_v\ \Delta T = nC_p\Delta\ T - nR\Delta\ T$$

أو

$$C_p - C_v = R \tag{6.22}$$

وحيث إن R موجب فإن C_p أكبر من C_v

و حيث إن

$$C_v = \frac{3}{2}\ R = 12.471\ J/mol.k$$

فإن

$$C_p = \frac{5}{2}R = 20.785 J/molk$$

وهي نتيجة ممتازة مقارنة بالقيم للغازات عند القيم القياسية. النسبة بين هاتين السعتين هي:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1.67 \tag{6.23}$$

هذه القيمة وقيمة C_p على اتفاق تام مع القيمة المقاسة للجزيئات أحادية الذرة ولكنها ليست كذلك مع الغازات ذات الجزيئات متعددة الذرات. انظر الجدول .(6.2)

جدول (6.2) السعة الحرارية المولية لمجموعة من الغازات

الغاز	C_p	C_v	C_p-C_v	γ
غازات أحادية الذرة				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.67
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
غازات ثنائية الذرة				
H_2	28.8	20.4	8.33	1.41
N_2	29.1	20.8	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl_2	34.7	25.7	8.96	1.35
غازات عديدة الذرات				
CO_2	37.0	28.5	8.50	1.30
SO_2	40.4	31.4	9.00	1.29
H_2O	35.4	27.0	8.37	1.30
CH_4	35.5	27.1	8.41	1.31

مثال 6.7

أسطوانة تحوي أربعة جرامات جزيئية (*4.0moles*) من الهيليوم عند درجة حرارة *300.0K* .

أ- احسب كمية الحرارة التي يجب إضافتها للغاز لتصل درجة حرارته *500.0K* إذا سخن الغاز في وعاء ثابت الحجم.

ب- احسب كمية الحرارة التي يجب إضافتها للغاز عند ضغط ثابت لتصل درجة الحرارة $500.0K$.

الحل:

أ- عند زيادة كمية الطاقة مع ثبات الحجم فإن W =0.0

وتستخدم العلاقة

$$Q_1 = \frac{3}{2} nR\,\Delta T = n\,C_V \Delta T$$

لكن

$$\Delta T = 200.0K \text{ و } C_V = 12.471\ J/mol.K$$

وعليه فإن

$$Q_1 = (4\ moles)(12.471\ J/molKk)(200.0K)$$
$$= 9.97 \times 10^3\ J$$

ب- حيث إن

$$C_p = 20.785\ J/mol.K$$

فإن

$$Q_2 = nC_p\,\Delta T$$

$$Q_2 = (4.0 moles)(20.785 J/molK)(200.0K) = 1.663\times10^4 J$$

مثال 6.8

في المثال السابق احسب الشغل المبذول من قبل الغاز في هذه العملية.

الحل :

$$W = Q_2 - Q_1 = 1.663 \times 10^4 - 9.97 \times 10^3$$
$$= 6.66 \times 10^3\ J$$

مثال 6.9

أثبت أنه في حال الغاز المثالي تام العزل ، adiabatic يكون $PV^{\gamma} = D$ حيث D ثابت و γ ثابت يعتمد على نوع الغاز (انظر الجدول 6.2)

الحل:

في حالة عزل الغاز المثالي عن الوسط المحيط لا يتم انتقال أي حرارة منه أو إليه وفي هذه الحالة فإن أي تغير في أحد المتغيرات T و V و P يتبعه تغير في البقية. وحيث إن الغاز معزول فإن $\Delta Q = 0.0$.

الشغل المبذول من قبل الغاز هو $dW=PdV$ وحيث إن الطاقة الداخلية للغاز تعتمد فقط على درجة الحرارة فإن التغير في الطاقة الداخلية هو:

$$dU = nC_v dT = -PdV$$

من معادلة الغاز المثالي $PV = nRT$ نحصل على:

$$PdV + VdP = nRdT$$

بالتعويض عن dT نجد أن:

$$PdV + VdP = -\frac{R}{C_V}\, PdV$$

نعوض عن $R = C_p - C_V$ ونقسم على PV لنحصل على:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -\left(\frac{C_P - C_V}{C_V}\right)\frac{dV}{V}$$
$$= (1-\gamma)\frac{dV}{V}$$

أي أن:

$$\frac{dP}{P}+\gamma\frac{dV}{V}=0$$

وبالتكامل نحصل على:

$$ln\,P + \gamma\, ln\, V = constant$$

أي أن:

$$PV^{\gamma} = \text{Constant} = D$$

أي أن:

$$P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma} \tag{6.24}$$

وهو المطلوب. حيث f , i تعني حالتي الغازالابتدائية والنهائية.

مثال 6.10

أسطوانة بها هواء عند درجة حرارة $20.0^o\,C$ ضُغطت من حالة أولى فيها الضغط $1.0\ atm$ والحجم $0.8m^3$ إلى حالة ثانية فيها الحجم $0.06m^3$ افرض أن الهواء غاز مثالي له $\gamma = 1.4$ وأن التضاغط معزول adiabatic. احسب الضغط النهائي ودرجة الحرارة النهائية .

الحل:

بالتعويض في المعادلة (6.24) نجد أن الضغط النهائي:

$$P_f = P_i(\frac{V_i}{V_f})^{\gamma} = 1\,atm(\frac{0.8}{0.06})^{1.4}$$
$$= 37.6\ \text{atm}$$

وحيث إن العلاقة $PV = nRT$ دائماً صالحة أثناء التحول وحيث إنه لم يفقد أي جزء من الغاز فإنه يمكن استخدام المعادلة (6.24) لحساب درجة الحرارة النهائية:

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

$$T_f = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} T_i = \frac{(37.6\, atm)(0.06\, m^3)}{(1.0 atm)(0.8 m^3)}$$

$$= 826.0\, k \;\; = 553.0^0 C$$

6.5 قانون ماكسويل للتوزيع العددي للسرعات

MAXWELL'S LAW FOR THE DISTRIBUTION OF VELOCITIES

في مثال سابق درسنا تغير الضغط بتغير الارتفاع ووصلنا إلى العلاقة :

$$P = P_o e^{-mgy/RT}$$

حيث P_0 هو الضغط عند $y = 0.0$ أي أكبر ضغط، لكن من قانون الغاز المثالي رأينا أن :

$$PV = NkT$$

حيث N هو عدد الجزيئات و k هو ثابت بولتزمان، أي أنه عند الحجم ودرجة الحرارة الثابتين فإن P تتناسب طرداً مع N وبالتعويض عن P ينتج أن :

$$N = N_o e^{-mgy/RT} \qquad (6.25)$$

وهي علاقة تربط بين عدد الجزيئات عند سطح الأرض وعددها على ارتفاع y وهو **قانون بولتزمان للتوزيع**.

وحيث إن حركة الجزيئات عشوائية في عمود هواء ارتفاعه y فإنه في حالة الاتزان الحراري يعُبر عند شريحة في أعلى الارتفاع تيارات من الهواء أحدهما إلى أعلى والآخر إلى أسفل ويتساوى عدد الجزيئات فيهما.

عند سطح الأرض $y = 0$ يستطيع جزيء سرعته V_0 أن يرتفع مسافة

$y = \frac{v_o^2}{2g}$ وفقاً لقوانين الحركة. وعندما يصل إلى أقصى ارتفاع تتحول طاقته إلى طاقة مخزونة قدرها mgy ثم يسقط بعدها الجزيء تحت تأثير الجاذبية.

وهذا يعني أن الجزيئات التي تستطيع الوصول إلى ارتفاع قدره y هي التي لها سرعة ابتدائية $\sqrt{2gy}$.

نفرض أن دالة التوزيع للسرعات هي $f(v)$ وعدد الجزيئات التي لها سرعات بين v_o و $v_o + dv_o$ عند سطح الأرض هي $N f(v_o) dv_o$

عدد الجزيئات التي تعبر ارتفاع dy في الثانية هي:

$$N_1 = \int_0^{\infty} v_0 N_0 f(v_0)\, dv_0$$

وقد اخترنا حد التكامل v_0 لأن الجزيئات التي لها سرعة أقل من v_0 لا تصل إلى أعلى ارتفاع y.

عدد الجزيئات التي تعبر نفس الطبقة، dy ، إلى أسفل هي:

$$N_2 = \int_0^{\infty} vN f(v)\, dv$$

لكن عدد الجزيئات في التيارين واحد $N_1 = N_2$

$$\int_0^{\infty} v_0 N_0 f(v_0)\, dv_0 = \int_0^{\infty} v\ N\ f(v)\, dv$$

وبالتعويض عن N من المعادلة (6.25) وإزالة التكامل يكون:

$$N_0\ f(v_0)\, v_0\ dv_0 = N_0\ e^{-mgy/RT}\ f\ (v)\, v\ dv$$

لكن من قوانين الحركة نعلم أن:

$v^2 = v_0^2 - 2gy$

ومنها :

$v dv = v_o dv_o$

وبحذف $v_o dv_o$ و $v d\bar{v}$ من الطرفين نجد أن :

$$f\left[\sqrt{v^2 + 2gy}\right] = e^{-mgy/RT} f(v) \qquad (6.26)$$

وهذه معادلة اعتمادية Functional Equation لا تتحقق إلا إذا كان للدالة $f(v)$ الصورة :

$f(v) = A\, e^{-E/RT}$

حيث E هي طاقة الحركة للجزيء وتعرف الدالة $f(v)$ بدالة التوزيع العددي لماكسويل.

6.6 الرطوبة Humidity

يوجد في الجو كمية ضئيلة من بخار الماء مقارنة بالأكسجين والنتروجين ونسمي وزن الرطوبة الموجودة في متر مكعب من الهواء بالرطوبة المطلقة Absolute Humidity أما الرطوبة النسبية Relative Humidity فنعني بها النسبة بين وزن بخار الماء في حجم معين من الهواء ووزن بخار الماء اللازم لكي يتشبع هذا الحجم عند نفس درجة الحرارة.

وحيث إن :

الوزن = الحجم × الكثافة × الجاذبية

فإن :

$$\text{الرطوبة النسبية} = \frac{\text{كثافة البخار في حجم معين من االهواء}}{\text{كثافة البخار المشبع}} \times 100$$

$$= 100 \times \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

من قانون بويل لدينا:

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$P_1 \frac{m}{\rho_1} = P_2 \frac{m}{\rho_2}$$

حيث ρ_1 , ρ_2 هما الكثافة في الحالتين

أي أن:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{6.27}$$

أي أن:

$$\text{الرطوبة النسبية} = \frac{\text{ضغط بخار الماء في حجم معين من الهواء}}{\text{ضغط البخار المشبع في نفس درجة الحرارة}} \times 100$$

$$= \frac{P_1}{P_2} \times 100 \tag{6.28}$$

علماً بأن ضغط بخار الماء في حجم معين من الهواء عند درجة حرارة البخار المشبع = ضغط بخار الماء عند نقطة الندى.

مثال 6.11

إذا كان ضغط بخار الماء في الجو هو $0.012 \times 10^5\ Pa$ ودرجة الحرارة هي 20.0^oC فاحسب الرطوبة النسبية.

الحل :

من الجدول (6.3) نجد أن ضغط البخار المشبع عند درجة $20.0^{o}\ C$ هو $0.0233\ \times 10^{5}\ Pa$ وعليه فإن الرطوبة النسبية

$$R.Hum = \frac{0.012\times 10^{5}\ Pa}{0.0233\times 10^{5}\ Pa}\times 100 = 52\%$$

جدول(6.3) ضغط بخار الماء المشبع عند درجات حرارة مختلفة

$T\,(C^{o})$	ضغط البخار $\times 10^{5}\ Pa$	$T\ (C^{o})$	ضغط البخار $\times 10^{5}\ Pa$
0.0	0.00610	120.0	1.99
5.0	0.00868	140.0	3.61
10.0	0.01190	160.0	6.17
15.0	0.01690	180.0	10.0
20.0	0.02330	200.0	15.5
40.0	0.07340	220.0	23.2
60.0	0.19900		
80.0	0.47300		
100.0	1.01000		

مثال 6.12

احسب الرطوبة النسبية في يوم درجة حرارته $40.0^{0}C$ علماً بأن الندى يتشكل عند درجة الصفر المئوي.

الحل :

$$\text{الرطوبة النسبية} = \frac{\text{ضغط بخار الماء الجزئي}}{\text{ضغط بخار الماء عند درجة حرارة الجو}} \times 100$$

ضغط بخار الماء عند درجة 40.0^0C هو $0.0734 \times 10^5\ Pa$

ضغط بخار الماء الجزئي = ضغط البخار عند تشكل الندى

$$= 0.0061 \times 10^5\ Pa$$

$$R..Hum = 100.0 \times \frac{0.0061}{0.0734} = 8.31\ \%$$

مســائل

1- كم العدد التقريبي لجزيئات الهواء في حجم قدره الوحدة عند درجة الحرارة والضغط القياسيين .

احسب الحجم الذي يشغله جزيء واحد .

2- لوحدة الحجم من الهواء ، احسب عدد المولات في الظروف القياسية .

3- وعاء حجمه $0.5\ m^3$ به أكسجين تحت ضغط داخلي $1.0\times10^6\,Pa$ ودرجة حرارة $27.0^\circ C$ ، احسب كتلة الأكسجين .

4- احسب النسبة بين كثافتي الماء والأكسجين عند الشرطين القياسيين .

5- خزان حجمه $0.2\ m^3$ ملئ بالأكسجين عند ضغط داخلي $5.0\times10^5\,Pa$ ودرجة حرارة $50.0^\circ C$ وفيما بعد وجد نتيجة التسرب أن الضغط الداخلي أصبح $2.5\times10^5\,Pa$ ودرجة الحرارة $35.0^\circ C$

1 - احسب كتلة الأكسجين قبل التسرب .

2 - احسب كتلة الأكسجين المتسرب .

6- وعاء حجمه $2.0l$ مزود بمحبس يحوي أكسجين عند درجة حرارة $27.0^\circ C$ وضغط جوي. سخن الوعاء إلى درجة $100.0^\circ C$ وكان المحبس أثناءها مفتوحاً . بعدها قُفل المحبس وبُرد الوعاء إلى درجة حرارته الأصلية :

1- احسب الضغط النهائي داخل الوعاء .

2-احسب كتلة الغاز المتبقي في الوعاء .

7- أسطوانة بها هواء حجمه $1000.0cm^3$ عند الضغط الجوي ودرجة الحرارة 27.0^0C ضُغط ليصبح الضغط الداخلي $4.0\times10^6 Pa$ والحجم $100.0\ cm^3$.

احسب درجة الحرارة في هذه الحالة .

8- وعاء به $2.0g$ من الأُكسجين تحت ضغط كلي $10.0\ atm$ ودرجة حرارة $50.0^\circ C$ وبعد زمن وجد أن الضغط أصبح نصف السابق ودرجة الحرارة $27.0^\circ C$. عين كتلة الأُكسجين المتبقي.

9- باروميتر طول أنبوبته $1.0\ m$ ومساحة مقطعها $20.0cm^2$. يرتفع بها الزئبق إلى $70.0\ cm$ وكانت درجة الحرارة $30.0^\circ C$ والجزء في أعلى الأنبوبة مفرغ. أُدخل أكسجين إلى الجزء العلوي فانخفض الزئبق ليصبح ارتفاعه $60.0cm$ ، احسب كتلة الأكسجين المضاف .

10- في الطبقات السفلى من الغلاف الجوي وجد أن درجة الحرارة تتغير مع الارتفاع تبعاً للعلاقة الخطية التالية :

$$T = T_0 - \alpha y$$

حيث T_0 هي درجة الحرارة عند سطح الأرض و T هي درجة الحرارة عند الارتفاع y .

اثبت أن الضغط يعطى بالعلاقة :

$$\ln\left(\frac{P_0}{P}\right) = \left(\frac{Mg}{\alpha R}\right)\ln\left(\frac{T_0}{T_0 - \alpha y}\right)$$

11- أ- لجزيئات غاز مثالي اثبت أن

-1 $\bar{v}^2 \neq \overline{v^2}$ -2 $\bar{v} \neq v_{rms}$

ب- احسب جذر متوسط السرعة لغاز الأكسجين عند درجة حرارة $25.0^{\circ}C$.

ج- احسب سرعة الصوت في الغلاف الجوي عند الشرطين القياسيين إذا كانت كثافته $\rho = 1.3\ kg/m^3$

12- تمدد مول واحد من غاز مثالي عند ضغط ثابت ودرجة حرارة $40.0^{o}\ C$ من حجم $8.0\ l$ إلى حجم $15.0\ l$.

أ- احسب الشغل المبذول من تمدد الغاز.

ب- احسب درجة الحرارة النهائية للغاز .

13- إذا تمدد غاز مثالي في عملية شبه متوازنة ومتساوية في كمية الحركة ينخفض ضغطه من $0.12\times10^5\ Pa$ إلى $0.10\times10^5\ Pa$ ، وتخفض درجة حرارته من $27.0^{\circ}C$ إلى $7.0^{\circ}C$. هل الغاز أحادي الذرة أم ثنائي الذرة ؟

14- أسطوانة بها هيليوم كتلته $10.0g$ ودرجة حرارته $273.0K$. احسب الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارته إلى $400.0K$ مرة مع حجم ثابت والأخرى مع ضغط ثابت . عين الشغل المبذول في هذه العملية .

15- أسطوانة بها غاز النيون المعزول حرارياً . كانت درجة حرارته $15.0^{\circ}C$ وحجمه $0.5\ m^3$ وتحت ضغط جوي $2.0\ atm$. ضغط ليصبح حجمه $0.1\ m^3$.
احسب الضغط النهائي ودرجة الحرارة النهائية.

16- غرفة مغلقة حجمها $400.0\ m^3$ ودرجة الحرارة فيها $20.0^\circ C$ ، والرطوبة داخلها 89% شغل مزيل الرطوبة في هذه الغرفة لتقليل الرطوبة فيها ، افترض أن درجة الحرارة ثابتة .

احسب كتلة الماء الواجب إزالتها لكي تنخفض الرطوبة إلى 40% .

17- الرطوبة النسبية في غرفة 77% عندر درجة حرارة $20.0^\circ C$. احسب التغير في الرطوبة النسبية إذا انخفضت درجة الحرارة إلى $15.0^\circ C$ في نفس الغرفة.

18- احسب الرطوبة النسبية في يوم درجة حرارته $20.0^\circ C$ ويتشكل الندى فيه عند درجة حرارة $5.0^\circ C$.

19- عين درجة حرارة تشكل الندى في يوم درجة حرارته $20.0^\circ C$ والرطوبة النسبية فيه $52\ \%$.



الباب السابع

الحركة التوافقية البسيطة

The Simple Harmonic Motion



7.1 الحركة التوافقية البسيطة

The Simple Harmonic Motion

إذا تحرك جسم حول نقطة مبتعداً عنها تارة ومقترباً منها تارة أخرى فإن هذه الحركة تسمى **بالحركة الاهتزازية**.

وسوف ندرس في هذا الباب نوعاً منها هو الحركة الاهتزازية البسيطة "التوافقية" ومن أمثلتها حركة جسم معلق بحلزون، حركة البندول البسيط، حركة الرقاص في الساعة، حركة الأوتار، وكذلك فإن حركة الجزيئات في الأجسام الصلبة تكاد تكون حركة توافقية بسيطة.

إن دقائق الوسط الذي تنتشر فيه الموجة مهما كان شكلها تهتز اهتزازاً توافقياً. ويتضح ذلك حتى مع الأمواج الكهرومغناطيسية التي تتحرك في الفضاء الخارجي، لكن المقادير المهتزة هنا هي المجال الكهربائي والمغناطيسي المصاحب للموجة. ومثال أخير على الحركة الاهتزازية وهو الدائرة للتيار المتردد والذي يُعرف بدلالة الجهد، التيار، والشحنات الكهربية، والذي يهتز Oscillates مع الزمن.

ومن هذا يتضح أن دراسة الحركة التوافقية هو أمر أساسي ومقدمة مهمة لدراسة عدد من فروع الفيزياء.

تعريفات أساسية:

الزمن الدوري τ Periodic Time

هو الزمن اللازم لجسم ليعمل هزة كاملة أو دورة كاملة. فالبندول البسيط يبدأ من نقطة ثم يعود إليها ليكمل الدورة. والموجة تقطع مسافة تعرف بطول الموجة في هذا الزمن لتكرر نفسها بعد ذلك وهكذا.

التردد Frequency

هو عدد الاهتزازات الكاملة في وحدة الزمن. ومن الواضح أن التردد يساوي مقلوب الزمن الدوري أي أن $f = \frac{1}{\tau}$ ووحدته الدولية هي دورة لكل ثانية وتسمى هيرتز Hertz $(1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1})$. ويعرف تبعاً لها التردد الزاوي وهو قيمة ثابتة لها الصيغة $\omega = 2\pi f$

السعة Amplitude

يرمز له بالرمز A وهو أكبر إزاحة رأسية للموجة عن خط الاتزان شكل (7.1) أي أن $A = |x|_{max}$.

طول الموجة Wavelength

يرمز لها بالرمز λ وهي الإزاحة التي تتحركها الموجة لتكرر نفسها بعد ذلك شكل (7.1) وتحسب من المعادلة:

$$\lambda = v\,\tau \tag{7.1}$$

$$= v / f \tag{7.2}$$

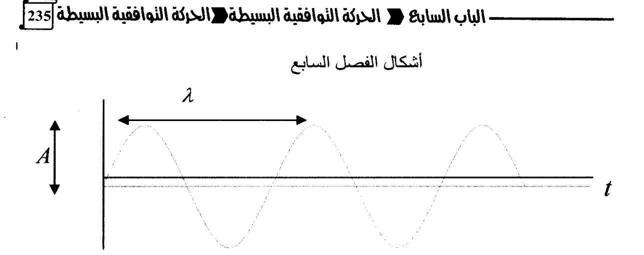
حيث v هي سرعة الموجة.

قوة الإعادة The Restoring Force

عند دراستنا للمرونة رأينا أنه عند التأثير على جسم بقوة F فاستطال مسافة x فإنه وفي حدود المرونة التامة تكون العلاقة بينهما طردية أي أن:

$$F' = kx$$

أشكال الفصل السابع

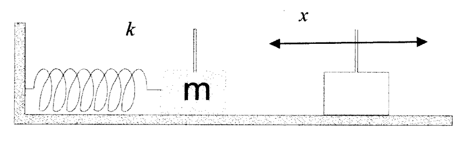


شكل (7.1) حركة اهتزازية

k ويسمى ثابت القوة أو ثابت التناسب ويسمى أحياناً ثابت هوك Hook's constant إذ أن القانون أعلاه يعرف بقانون هوك. إذا رفعت القوة التي أحدثت التمدد x فإن الجسم يعود إلى حالته بتأثير قوة جذب تسمى قوة الإعادة وهي القيمة السالبة لقوة التأثير شكل (7.2) أي أن:



$$F = -k\,x \qquad (7.3)$$



شكل (7.2) قوة الإعادة

مثال 7.1

احسب طول الموجة لموجة راديو AM تتحرك في الهواء بتردد 1MHz وكذلك بتردد 100MHz .

الحل :

١- نعلم أن موجات الراديو في الفراغ لها سرعة الضوء وعليه فإن:

$$\lambda_1 = v\tau_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3\times10^8 m/s}{1MHz} = 300m$$

٢- وفي الحالة الثانية فإن:

$$\lambda_2 = \frac{3\times10^8 m/s}{100MHz} = 3m$$

7.2 معادلات الحركة التوافقية البسيطة

Equations of Simple Harmonic Motion

للوصول إلى معادلات الحركة التوافقية البسيطة نساوي القوة في المعادلة (7.3) بتلك في قانون نيوتن الثاني

$$F = -kx = ma \tag{7.4}$$

حيث m هي كتلة الجسم و a هي تسارعه الخطي.

ويعاد كتابة المعادلة (7.4) في صيغتها التفاضلية على الصورة التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{7.5}$$

أي أنه عند لحظة معينة يتناسب التسارع طرداً مع القيمة السالبة للإزاحة.

وقبل استنتاج المعادلات نتعرف على شكل طاقة الوضع والطاقة الكلية للجسم لأهميتها ثم ليسهل استنتاج معادلات الحركة.

ولمعرفة الطاقة الكلية للجسم المهتز نحسب أولاً الطاقة المخزونة أو طاقة الوضع Potential energy من تكامل القوة

$$U = \int_x^0 F dx = \frac{1}{2}k\ x^2 \tag{7.6}$$

وحيث إن الطاقة الكلية هي مجموع طاقتي الحركة والوضع وهي دائماً ثابتة أي أن:

$E\ = K + U =$ ثابت

أو

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{ثابت} \tag{7.7}$$

وللفائدة ، فإننا نعيد استنتاج هذه المعادلة باستخدام حقيقة أن القوة تمثل معدل تغير كمية الحركة بالنسبة للزمن

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}(mv) = \frac{dv}{dx}(mv) = -kx$$

إذن

$$mvdv + kxdx = 0.0$$

وبالتكامل نحصل على المعادلة (7.7).

ولمعرفة الثابت فإننا نعلم أنه عند $x = A$ أي عند أقصى نقطة يصلها المهتز تنعدم السرعة وتكون الطاقة كلها طاقة وضع ،

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{7.8}$$

وعندما تكون السرعة أكبر ما يمكن أي عند $x = 0.0$ فإن الطاقة كلها طاقة حركة ،

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \tag{7.9}$$

ومن المعادلات (7.8) و (7.9) نحصل على العلاقات بين السعة والطاقة الكلية والسرعة الكبرى للمهتز

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad (7.10)$$

$$v_{MAX} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad (7.11)$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad (7.12)$$

ومن المعادلة (7.8) نجد أن:

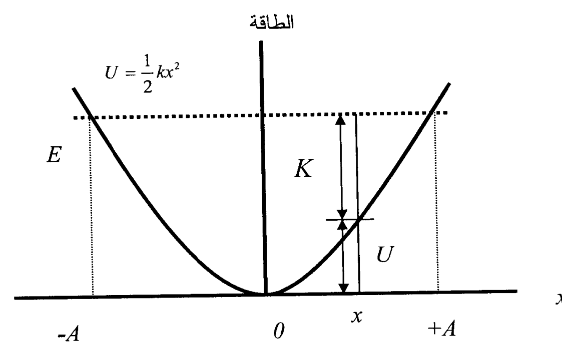
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{A^2 - x^2} \qquad (7.13)$$

أو

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) = v_{\max}^2 - \frac{k}{m}x^2$$

وهي معادلة تشبه شكلاً معادلة الحركة الخطية

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$



شكل (7.3) ويمثل العلاقة بين الطاقة الكلية والطاقة الحركية والطاقة الكامنة.

ويبين الشكل (7.3) أهمية المعادلة (7.8) إذا رسمنا الطاقة عمودياً و x أفقياً ومثلنا U و K فإننا نلاحظ من الرسم ماذكرناه عن قانون حفظ الطاقة إذ أنه عند أي نقطة على الرسم نجد دائما أن **U+K = ثابت** .

ولاستنتاج معادلة الحركة نعوض في المعادلة (7.13) عن السرعة v بالمشتقة $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$$

ولإجراء التكامل نفرض الزاوية θ في مثلث وتره A ومقابل الزاوية x

$$\sin\theta = \frac{x}{A} \rightarrow \; dx = A\cos\theta\, d\theta$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه يكون:

$$\int\frac{A\cos\theta\, \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}^2\, \sin^2\theta}} = \int d\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$$

أي أن:

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}\; t + C$$

عند الزمن $t = 0$ تكون $\theta_0 = C$

أي أن:

$$\theta = \theta_0 + \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

لكن :

$$\theta = \sin^{-1}\frac{x}{A}$$

أي أن :

$$x = A\sin\theta$$

أو :

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t + \theta_0\right) \qquad (7.14)$$

الكمية بين قوسين في المعادلة (7.14) تمثل زاوية وحيث إن المعادلة تمثل حركة دورية فإنها تأخذ قيماً بين صفر و 2π .

أي أنه عند إكمال دورة تكون الزاوية 2π والزمن τ ولنفرض أن $\theta_0 = 0.0$

فيكون :

$$2\pi = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \tau$$

أو

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

أي أن زمن الدورة يحدّد بمعرفة ثابتين هما الكتلة للجسم المهتز ونوع مادته أي معرفة k ولا يعتمد على الطاقة أو سعة الموجة.

وحيث إن التردد هو مقلوب الزمن الدوري فإن :

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.15)$$

ويعرف التردد الزاوي للحركة بأنه :

$$\omega = 2\pi f$$

ومنها مع المعادلة (7.15) نجد أن:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

وغالباً ما تكتب المعادلات السابقة بدلالة ω والتي لها وحدة radian/second أو rad/sec والآن نعيد كتابة معادلتي الإزاحة والسرعة

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0) \qquad (7.16)$$

$$v = \pm \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (7.17)$$

ويمكن الحصول على السرعة والتسارع بتفاضل الإزاحة

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \theta_0) \qquad (7.18)$$

$$a = \frac{d2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) \qquad (7.19)$$

أو

$$a = -\omega^2 x \qquad (7.20)$$

وهذه هي المعادلة (7.5) بدلالة التردد الزاوي.

جدول (7.1)يبين معادلات الحركة التوافقية البسيطة والحركة الخطية

الحركة التوافقية البسيطة	الحركة الخطية ذات التسارع الثابت
$x = A \sin(\omega t + \theta_\circ)$	$x = x_o + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$v = \pm \omega\sqrt{A^2 - x^2}$	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
$v = \omega A \cos(\omega t + \theta_\circ)$	$v = v_0 + at$
$a = -\omega^2 x$	$a =$ ثابت
$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_\circ)$	

يمكن تلخيص معادلات الحركة التوافقية البسيطة ومقارنتها بمعادلات الحركة الخطية كما يظهر في الجدول (7.1).

بالرجوع إلى المعادلة (7.2) نجد أن :

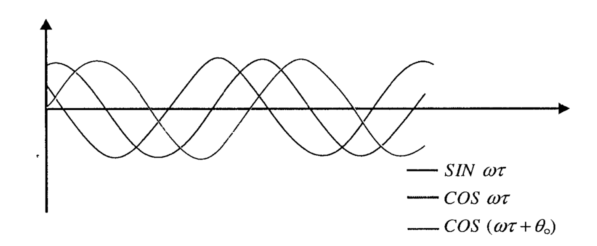
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

وهذه معادلة تفاضلية تعني أن x دالة إذا فاضلناها مرتين نحصل على ثابت سالب مضروب في الداله نفسها وهذا ينطبق على العديد من الدوال منها:

$$x = A \sin \omega t \qquad (7.21a)$$

$$x = A \cos \omega t \qquad (7.21b)$$

$$x = A \cos (\omega t + \theta_\circ) \qquad (7.21c)$$



شكل رقم (7.4) علاقة الطور للمعادلات (7.21)

والفرق بين الثلاث معادلات هو في زاوية الطور ، انظر الشكل (7.4) ، ولكي نعرف أي المعادلات السابقة نستخدم نعود إلى الزمن $t = 0$ ونرى نوع السرعة والإزاحة ، فمثلاً المعادلة $x = A \sin \omega t$ لها القيم الابتدائية $x_o = 0.0$ و v_o

$= A\omega$. إذن إذا أعطى الجسم المهتز سرعة ابتدائيـة قصوى وبغير إزاحة ابتدائية فإننا نستخدم $x = A \sin \omega t$. أما المعادلة $x = A \cos \omega t$ فإنها تستخدم عند إزاحة ابتدائية قصوى وسرعة ابتدائية تساوي صفراً . عندما يُعطى الجسم المهتز سرعة ابتدائية لا تساوي الصفر وكذلك إزاحة ابتدائية لا تساوي الصفر فإن المعادلة المستخدمة هي $x = A\cos(\omega t + \theta_0)$. ولمعرفة العلاقة بين زاوية الطور والسعة والإزاحة الابتدائية x_o فإننا نستخدم المعادلة (7.21c) حيث :

$$x_o = A \cos \theta_\circ \tag{7.22}$$

و

$$v_o = -\omega A \sin\theta_0 \tag{7.23}$$

نقسم المعادلة (7.23) على ω ثم نُربع المعادلتين ونستخدم الحقيقة

$$\sin^2 \theta_\circ + \cos^2 \theta_\circ = 1.0 \tag{7.24}$$

لنجد أن :

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \tag{7.25}$$

ولمعرفة قيمة زاوية الطور نقسم المعادلة (7.23) على المعادلة (7.22) لنجد أن

$$\tan\theta_0 = -\frac{v_0}{\omega\, x_0} \tag{7.26}$$

مثال 7.2

سيارة كتلتها $1500.0\ kg$ وبها أربعة رُكّاب متوسط كتلة الراكب $70.0\ kg$ لها أربعة مساعدات حلزونية ثابت القوة لكل منها $25000.0\ N/m$.

احسب التردد لاهتزاز السيارة إذا مرت على مطب وكم الزمن للسيارة لتعمل اهتزازين.

الحل :

كتلة السيارة مع الركاب = 1780.0kg

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25000.0\ \text{N/m}}{1780.0\ \text{kg}}} = 0.6\ \text{Hz}$$

$$\tau = \frac{2.0}{f} = 3.35 \quad \text{seconds}$$

مثال 7.3

ربط الطرف الحر لحلزون بجسم كتلته $1.0kg$ وسحب مسافة $10.0\ cm$ ليترك يهتز. إذا علمت أن القوة تتناسب طرداً مع الإزاحة وأن قوة قدرها $10.0N$ تعطي إزاحة قدرها $5.0cm$.

أ- احسب زمن الدورة والتردد الزاوي .

ب- احسب أقصى سرعة وأقصى تسارع .

ج- احسب السرعة والتسارع عند إزاحة $4.0cm$.

د- احسب الزمن اللازم للجسم ليتحرك إلى منتصف المسافة بين موضع سكونه والإزاحة القصوى.

الحل :

أ- نعلم أن

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

لكن

$$k = \frac{F}{x} = \frac{10.0\,N}{0.05\,m} = 200.0\,N/m$$

إذن

$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{1.0kg}{200.0N/m}} = 0.444$ s;

$f = \frac{1}{\tau} = 2.25$ Hz;

$\omega = 2\pi f = 14.14 s^{-1}$

ب-

$v_{max} = \pm\omega A = \pm 1.414$ m/s

$a_{max} = -\omega^2 A = 19.99$ m/s^2

جـ- السرعة عند إزاحة قدرها $4.0\ cm$

$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$= \pm 14.14 s^{-1}\sqrt{0.1^2 m^2 - 0.04^2 m^2} = \pm 1.3 m/s$

د- لحساب الزمن ليصل الجسم إلى منتصف المسافة فإننا نعود إلى الشروط الابتدائية حيث إنه عند الزمن $t = 0.0$sec كانت الإزاحة $10.0cm$ والسرعة الابتدائية تساوي صفراً. فإن المعادلة الأنسب هي:

$x = A\cos\omega t$

هنا

$x = \frac{A}{2}$

$\frac{A}{2} = A\cos\omega t$

أو

$0.5 = \cos\omega t$

إذن

$$(14.14\,s^{-1})t = \cos^{-1} 0.5 = 60.0^0 = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{3\times 14.14\,s^{-1}} = 0.074\,s$$

مثال 7.4

في المثال السابق أُعطي الجسم إزاحة ابتدائية قدرها *2.0cm* وسرعة ابتدائية قدرها *1.0m/s* احسب السعة ، زاوية الطور والطاقة الكلية، ثم اكتب معادلة مكان الجسيم.

الحل:

من المعادلة (7.25)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(0.02m)^2 + (\frac{1.0m/s}{14.14\,s^{-1}})^2}$$
$$= 0.0735\,m$$

ومن المعادلة (7.26)

$$\theta_0 = \tan^{-1}(-\frac{v_0}{\omega x_0}) = \tan^{-1}\frac{-1.0m/s}{(14.14s^{-1})(0.02m)} = -74.2^\circ = 1.3rad$$

لحساب الطاقة لدينا

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times 200.0\frac{N}{m}\times(0.0735m)^2$$
$$= 0.54\,J$$

أو تحسب من المعادلة

$$E = \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$
$$= 0.5\,x1.0kgx\,(1.0m/s)^2 + 0.5x200.0N/m\,x\,(0.02m)^2$$
$$= 0.54\,J$$

من المعادلة العامة للإزاحة

$$x = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

نحصل على

$$x = 0.073m \cos[14.14\ s^{-1}t - 1.3\ rad]$$

مثال 7.5

جسم كتلته $0.5kg$ مربوط بحلزون أفقي ، حرك حركة توافقية بسيطة وفقاً للمعادلة $x = 0.1\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$

1 - عين الموقع الذي عنده تتساوى طاقتا الحركة والوضع .

2 - احسب القيمة الكبرى لكل من طاقتي الحركة و الوضع وعين قيمة ثابت الحلزون وأكبر سرعة للجسم .

3 - احسب كلا من طاقتي الوضع والحركة عند 0.04m .

4 - احسب النسبة بين طاقتي الحركة والوضع عند إزاحة تعادل نصف السعة .

الحل:

1 - تتساوى طاقة الحركة و طاقة الوضع عند الشرط $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$

و في هذه الحالة تكون $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

أي عند

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2.0}} = \pm\frac{0.1}{\sqrt{2.0}} = \pm 0.071m$$

2 - تأخذ طاقة الوضع قيمتها الكبرى عندما تساوي الطاقة الكلية وكذلك الحال بالنسبة لطاقة الحركة ، أي أن

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

أي أن :

$$U_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\times 0.5kg\times(\frac{\pi}{2})^2(0.1m)^2 = 6.16\times10^{-3}J = K_{\max}$$

يحسب الثابت k بأكثر من طريقة منها

$$k = \frac{2E}{A^2} = 1.23N/m$$

أقصى سرعة للجسم هي

$$v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1.57m/s$$

3 - طاقة الوضع عند x = 0.04m

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times1.23N/m\times0.04m^2 = 9.84\times10^{-4}J$$

طاقة الحركة عند نفس الإزاحة

$$K = E - U = (6.16\times10^{-3} - 9.84\times10^{4})J = 5.18\times10^{-3}J$$

4 - النسبة بين طاقتي الوضع والحركة عند إزاحة $x = \frac{1}{2}A$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{8}kA^2$$

$$K = E - U = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{8}kA^2 = \frac{3}{8}kA^2$$

إذن

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{8}kA^2}{\frac{3}{8}kA^2} = \frac{1}{3}$$

7.3- حركة الحلزون الراسية

Motion of A body Suspended from A spring

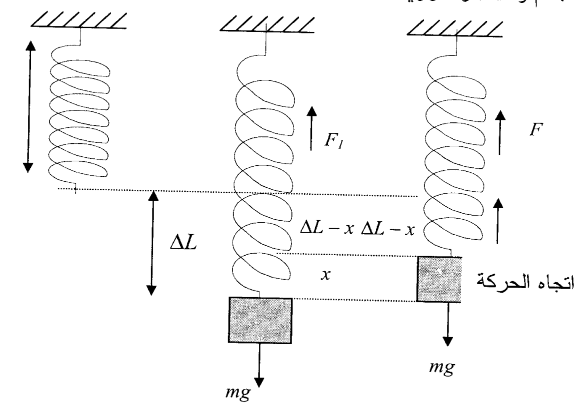
لنعلق حلزون طوله l ثم نعلق به جسم وزنه mg ليستطيل بمقدار ΔL مما يتسبب في قوة إعادة معاكسة لاتجاه الوزن ولها القيمة $F_1 = k\,\Delta L$ حيث k هو ثابت الزنبرك ومساوية للوزن أي أن:

$$k\Delta L = mg$$

والآن نفرض أن المجموعة في حالة حركة ولندرسها عند اللحظة التي يبعد الجسم عن نقطة الاتزان مسافة x ، وفي هذه الحالة فإن الاستطالة هي $\Delta L - x$ وهنا تكون القوة إلى أعلى تساوي $k\left(\Delta L - x\right)$ ويكون صافي القوة هو:

$$F = k\left(\Delta L - x\right) - mg = -kx$$

وهنا يكون صافي القوة يتناسب طرداً مع إزاحة الجسم عن مكان الاتزان ويهتز الجسم راسياً بتردد زاوي $\omega = \sqrt{k/m}$



شكل (7.5) ويمثل الشكل الحلزون قبل تعليق الجسم ثم الحلزون والجسم في حالة اتزان وأخيراً الحلزون مع اتجاه حركة الجسم إلى أعلى.

مثال 7.6

علق جسيم راسياً بحلزون طوله L ليستطيل بمقدار 1.0cm وليكون في حالة اتزان ، احسب زمنه الدوري.

الحل:

حيث إن الجسم في حالة اتزان فإن $x = 0.0$ وبالتعويض فإن :

$$F = k\left(\Delta L - x\right) - mg = 0.0$$

أي أن :

$$k = \frac{mg}{\Delta L}$$

لكن :

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

إذن :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = 0.1\sec$$

مثال 7.7

وضع جسم كتلته $10.0kg$ على طاولة تم ربطه بسلك من الفولاذ طوله $5.0m$ ليربط الكلاب في السقف ، إذا أزيلت الطاولة فإن السلك يستطيل ويبدأ الجسم في الاهتزاز إلى أعلى وإلى أسفل بحركة توافقية بسيطة . إذا كانت مساحة مقطع السلك $1.0mm^2$ ومعامل يونج لمادته $1.9\times10.0^{11}Pa$.

فاحسب زمن الدورة للجسم .

الحل:

نعلم أن معامل يونج يعطى بالعلاقة

$$Y = \frac{F / A}{\Delta L / L}$$

وبإعادة ترتيبها فإن القوة :

$$F = Y \frac{\Delta L}{L} A$$

لكن قانون نيوتن الثاني هو :

$$F = m\, a$$

ومن المعادلتين أعلاه نجد صيغة للتسارع هي:

$$a = \frac{F}{m} = \left(\frac{Y\, A}{m\, L} \right) \Delta L \qquad (1)$$

أي أن التسارع يتناسب طرداً مع الاستطالة وهذا يدل أن لدينا حركة توافقية بسيطة، ومعلوم في هذه الحالة أن

$$a = \omega^2\, x \qquad (2)$$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$\omega^2 = \frac{\mathrm{Y\ A}}{\mathrm{m\ L}} = 4\, \pi^2\, \mathrm{f}^2$$

$$\therefore f = \frac{1}{2\,\pi} \sqrt{\frac{Y\, A}{m\, L}} = \frac{1}{2\,\pi} \sqrt{\frac{1.9 \times 10^{11} \times \left(1.0 \times 10^{-6}\right)}{10.0 \times 5.0}}\ Hz$$

$$= 9.8\ Hz$$

$$\tau = \frac{1}{\mathrm{f}} = 0.1\ \mathrm{s}$$

مثال 7.8

علق جسم كتلته $2.0\ kg$ رأسياً بحلزون ليستطيل $5.0cm$. ثم سحب إلى أسفل مسافة إضافية قدرها $2.5cm$ ثم ترك يهتز. **احسب** زمنه الدوري وصافي قوة الهز .

الحل :

عندما كان الجسم في حالة اتزان فإن:

$$k\ \Delta L = mg$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{2.0 \times 9.8}{0.05}\ N/m = 392.0\ N/m$$

$$\tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{2.0}{392.0}} = 0.45\ s$$

وصافي قوة الهز هي

$$F = -kx = (-392.0N/m)(0.025m) = 9.8N$$

مثال 7.8

سحبت قوة مقدارها $28.0N$ حلزون رأسي ليستطيل بمقدار $12.0cm$ ، احسب كتلة جسم يعلق بالحلزون بحيث إذا اهتز كان زمنه الدوري $0.5sec$.

الحل :

لدينا قوة السحب والاستطالة ومنها يمكن معرفة ثابت الزنبرك

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{28.0\ N}{0.12\ m} = 233.3\ N/m$$

لكن

$$\tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ومنها فإن

$$m = \frac{k\ \tau^2}{4\ \pi^2} = \frac{233.3 \times 0.5^2}{4\ \pi^2}\ kg = 1.48kg$$

7.4 البندول البسيط The Simple Pendulum

البندول البسيط هو مثال آخر للحركة التوافقية البسيطة ويتكون من جسم كتلته m رُبط بطرف خيط خفيف وثُبت الطرف الآخر للخيط في نقطة يتدلى منها وتتم الحركة في مستوى رأسي تحت تأثير المركبة الجيبية للوزن انظر الشكل (7.6) . وسوف نثبت أنه إذا كانت الزاوية التي يميل بها البندول عن المحور الرأسي صغيرة فإن الحركة تمثل اهتزازاً توافقياً.

وبالنظر إلى الشكل نجد أن القوى المؤثرة على الكتلة هي قوة الشد T على امتداد الخيط ووزن الجسم mg والمركبة الجيبية $mg\ sin\theta$ والتي تتجه نحو الداخل أي أنها قوة رادة restoring force ومن معادلات الاتزان يكون

$$F_{11} = mg\sin\theta = -m\frac{d2S}{dt^2} \qquad (7.27)$$

حيث S هو طول القوس الذي يمثل مسار الجسم نحو نقطة الاتزان. الإشارة السالبة تعني أن القوة F_{11} تتجه نحو مكان الاتزان.

وحيث إنه في حال الزوايا الصغيرة يمكن تقريب طول القوس بالآتي:

$$S = L\theta$$

فإن المعادلة تصبح:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

إذا افترضنا أن الزاوية صغيرة ومقاسة بالريديان فإن $\sin\theta \approx \theta$ لتقرب المعادلة إلى:

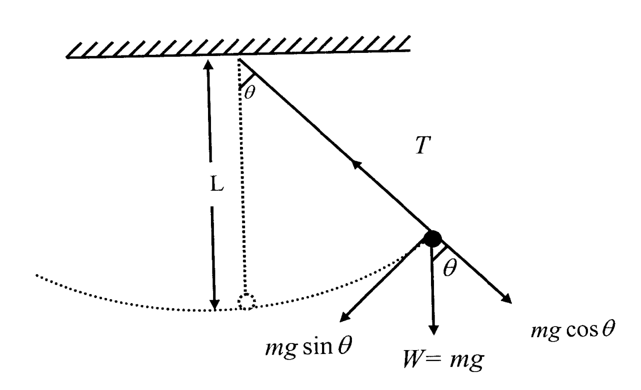
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \qquad (7.28)$$

أي أن لدينا معادلة من الدرجة الثانية في θ وهي شبيهة للمعادلة (7.5) وقياساً عليها فإن التردد الزاوي هو:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{7.29}$$

وزمن الدورة هو

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{7.30}$$



شكل (7.6) البندول البسيط

وحيث إن الزمن الدوري يعتمد فقط على طول الخيط وعلى عجلة الجاذبية ولا يعتمد على الكتلة فإن أي بندول له نفس الطول ونفس الموقع يكون له نفس الزمن الدوري بغض النظر عن وزن الجسم المعلق به. ونشير هنا إلى أنه في حالة الزاوية

الاختيارية $\sin\theta \neq \theta$ فإن زمن الدورة يُعطى بالعلاقة :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2}+....) \qquad (7.31)$$

حيث θ_0 هي أكبر إزاحة زاوية.

معادلات الحركه للبندول البسيط

Equations of Motion for the Simple Pendulum

يمكن وبسهولة التحقق أن أحد حلول المعادلة (7.28) هو:

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t+\phi) \qquad (7.32)$$

حيث θ_0 و ϕ هما على التوالي ، السعة الزاوية وزاوية الطور. ويمكن معرفة قيمتيهما من معرفة موقع وسرعة الجسم عند بداية الحركة. أما السرعة الزاوية فتعرف بتفاضل المعادلة (7.32) لتعطي:

$$w(t) = -\omega\theta_0\sin(\omega t+\phi) \qquad (7.33)$$

وبتربيع المعادلة (7.32) و ضربها في ω^2 ثم جمعها إلى مربع المعادلة (7.33) نحصل على:

$$w^2 = \omega^2(\theta_0^2-\theta^2) \qquad (7.34)$$

ومنها نحصل على القيمة الكبرى للسرعة الزاوية

$$w_m = \pm\omega\theta_0 \qquad (7.35)$$

أما التسارع الزاوي فيعرف بتفاضل المعادلة (7.33) لتعطي:

$$\alpha(t) = -\omega^2\theta_0\cos(\omega t+\phi) \qquad (7.36)$$

أو

$$\alpha(t) = -\omega^2\theta = -\frac{l}{g}\theta \qquad (7.37)$$

ونلاحظ هنا أن المعادلات (7.32) - (7.37) هي معادلات توافقية للحركة على قوس وتناظر معادلات الحركة (7.16) - (7.19) .

مثال 7.10

بندول بسيط طول خيطه $1.0m$ يهتز بسعة قدرها $0.2m$. احسب

أ- سرعة البندول الخطية عند أوطى نقطة. ب- تسارعه الخطي عند نهايتي المسار. ج- السعة الزاوية. د- السرعة الزاوية الكبرى. و- سرعة الجسم الزاوية عند الزاوية $\theta = 5.0°$.

الحل:

أ- أولاً نحسب زمن الدورة.

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.0\text{m}}{9.8\text{m/s}^2}} = 2.01\,\text{sec}$$

عند أوطى نقطة تكون السرعة أقصى مايمكن

$$v_{max} = |\omega A| = (3.1416\ s^{-1})\ (0.2\ m) = 0.628\ m/s$$

ب- عند الطرفين يكون التسارع كذلك أكبر مايمكن

$$a_{max} = \pm\ \omega^2 A = \pm 1.974\ m/s^2$$

ج- لحساب السعة الزاوية فإن:

$\sin\theta_0 \cong \dfrac{A}{L} = 0.2$ ومنها فأن $\theta_0 = 11.54°$

د- لحساب السرعة الزاوية الكبرى فإن:

$$w_m = \omega\theta_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}\theta_0 = 0.319s^{-1} \times 11.54^\circ = 0.064rad/\sec$$

و- لحساب السرعة الزاوية للجسم عند الزاوية $\theta = 5.0^\circ$ نستخدم المعادلة $w^2 = \omega^2(\theta_0^2 - \theta^2)$

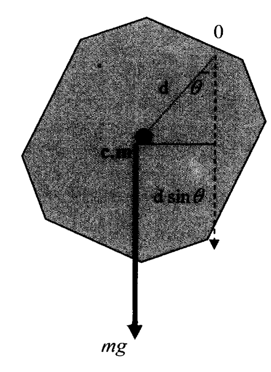
$$w^2 = (0.102\sec^{-2})(0.04rad^2 - 0.0077rad^2) = 03.3\times10^{-3}rad^2/\sec^2$$

ومنها فإن

$$w = \pm 0.0574rad/\sec$$

7.5- البندول المركب The Compound Pendulum

يتركب من أي جسيم صلب منتظم معلق من نقطة لاتمر عبر مركز ثقله . نفرض أن جسماً وزنه mg معلق من النقطة O والتي تبعد مسافة d عن مركز الثقل center of gravity (c.g) أو ما يعرف بمركز الكتلة center of mass $(c.m)$. العزم حول النقطة O للوزن هو $mgd\sin\theta$ لكن العزم يعطى بالصيغة $\tau = I\alpha$ حيث α يمثل التسارع الزاوي و I يمثل عزم القصور الذاتي أي أن



شكل(7.7) جسم منتظم يمثل البندول المركب

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

والإشارة السالبة كذلك تدل على أن قوة الإعادة تتجه نحو جهة النقص في θ . وإذا فرضنا ثانية أن θ صغيرة كما سبق فإن $\sin\theta \approx \theta$ أي أن

$$\frac{d2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad (7.38)$$

حيث

$$\omega^2 = mgd/I$$

وبأخذ الجذر لها فإن

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (7.39)$$

أما الزمن الدوري فيعطى بالعلاقة

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (7.40)$$

مثال 7.11

قضيب طوله L علق من نقطة تبعد مسافة $\frac{L}{4}$ عن مركز الكتلة. إذا هُز هذا القضيب حول هذه النقطة بحركة توافقية بسيطة فاحسب زمن الدورة له.

الحل:

نعتبر القضيب منتظماً وعليه فإن مركز الكتلة يكون في منتصفه أي أن نقطة التعليق تبعد أيضاً $\frac{L}{4}$ من طرفه العلوي.

نحسب أولاً عزم القصور الذاتي للقضيب من التكامل.

$$I = \int x^2 dm = \frac{m}{L}\int_{-L/4}^{3L/4} x^2 dx = \frac{m}{L}(\frac{x^3}{3})|_{-L/4}^{3L/4}$$

$$= \frac{m}{3}L^2\left[\frac{28}{64}\right] = \frac{7}{48}mL^2 = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{3}{4}L\right)^3 - \left(\frac{-L}{4}\right)^3\right]$$

ثم نستخدم المعادلة (7.40) لحساب الزمن الدوري مع التعويض عن الذراع بالقيمة $L/4$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{48}mL^2}{mg\frac{L}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{12}\frac{L}{g}}$$

افرض $L = 1.5\ m$ فيكون $\tau = 1.88\ sec$

مثال 7.12 :

قضيب خفيف، يمكن إهمال وزنه، طوله $1.0m$. ثبت به خمسة أجسام كتلة كل منها $0.5kg$ وتبعد عن طرف التعليق المسافات:

$25.0cm$ و$40.0cm$ و $60.0cm$ و$75.0cm$ و$100.0cm$. إذا حركت المجموعة حول نقطة التعليق فكم زمن الدورة الواحدة؟

الحل:

نحسب أولاً بعد مركز الثقل عن نقطة التعليق

$$L = \frac{\sum m_i L_i}{\sum m_i} = \frac{0.5kg(0.25+0.4+0.6+0.75+1.0)}{2.5kg} = 0.6m$$

عزم القصور الذاتي

$$I = mL^2 = 2.5kg \times 0.6^2 = 0.9kg.m^2$$

ويحسب الزمن الدوري من المعادلة (7.40)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{0.9kg.m^2}{2.5kg \times .9.8m/s^2 \times 0.6m}} = 1.55 \sec onds$$

7.6- الحركة التوافقية البسيطة المخمدة :

Damped Simple Harmonic Motion

تطرقنا عند شرح الحركة التوافقية البسيطة المثالية إلى أن القوة التي تحدث هذه الحركة هي قوة محافظة . كانت هذه القوة هي قوة الحلزون في حالة جسم مربوط بحلزون وفي الرقاص كانت قوة الجاذبية الأرضية في البندول البسيط . ولكن مثل هذه الحركات تتعرض لقوى غير محافظة كقوة الاحتكاك ومقاومة المائع (الهواء مثلا) التي تحاول إخماد هذه الحركة عن طريق تبديد الطاقة الميكانيكية التي تصحب حركة الجسم أو خلال الوسط الذي ينتج القوة غير المحافظة .

إن مقاومة المائع أو قوة الاحتكاك تتناسب طردًا مع سرعة الجسم بشكل تقريبي وعليه فإن قانون نيوتن الثاني الذي يصف حركة الجسم يمكن كتابته بشكل أكثر دقة كالتالي :

$$m\frac{d2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

أو

$$m\frac{d2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (7.41)$$

حيث يصف الحد $-b\frac{dx}{dt}$ مقاومة المائع أو قوة الاحتكاك وb ثابت موجب يسمى عامل الإخماد (Damping coefficient) . إن الحل العام للمعادلة

التفاضلية أعلاه هو:

$$x = A_0 e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \theta) = A_0 e^{-\omega_b t}\cos(\omega' t + \theta) \qquad (7.42)$$

حيث تكون سعة الذبذبة في هذه الحالة هي $A_0 e^{-\omega_b t}$ والتي تتغير مع الزمن نتيجة لضياع جزء من الطاقة الميكانيكية للجسم المهتز الذي يتذبذب بتردد زاوي مقداره ω' .

وقيمتها يمكن معرفتها من تعويض المعادلة (7.42) في المعادلة (7.41) فينتج أن:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_b^2} \qquad (7.43)$$

أما قيم الثابتين θ و A_0 فيمكن معرفتهما من شروط بدء الحركة أي موقع وسرعة الجسم عند بداية الحركة أي عند الزمن $t=0$. ويسمى الثابت $\omega_b = \frac{b}{2m}$ بالتردد الزاوي الإخمـــادي (Damping angular frequency) و A_0 بسعة الذبذبة عند بدء الحركة .

إن طبيعة الحركة الاهتزازية مع الزمن يعتمد على قيمة $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بالنسبة لقيمة w_b.

7.8 الرنين والحركة التوافقية البسيطة المجبرة
Resonance and Forced Simple Harmonic Motion

لنأخذ جسماً يتحرك حركة توافقية بسيطة وتؤثر عليه قوة غير محافظة تحاول إخماد حركته بالإضافة إلى قوة خارجية محركة تجبره على الاهتزاز مثل

$$F = F_0 \cos\omega t$$

حيث تكون القيمة العظمى للقوة المحركة F تساوي الثابت F_0 وتتغير مع الزمن كدالة جيب التمام ($\cos\omega t$) ويسمى هذا النوع من الحركة بالاهتزاز المجبر (Forced oscillation). يلاحظ أن معادلة الحركة تحوي ثلاثة ترددات زاوية تختلف في مصدرها وطبيعتها وقيمتها عن بعضها فالأولى هي التردد الزاوي للقوة المحدثة للاهتزاز المجبر F ، والثانية التردد الزاوي الطبيعي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ والمصحوبة بالاهتزاز المثالي . والثالثة التردد الزاوي الإخمادي $\omega_b = \frac{b}{2m}$ ويمكن أن يأخذ التردد الزاوي ω أية قيمة بينما تعتمد ω_0 و ω_b على الجسم والقوة المحدثة للاهتزاز مثل قوة الزنبرك (F_s) وطبيعة الوسط .

تؤثر على الكتلة المهتزة في هذه الحالة ثلاث قوى هي قوة الإعادة ($-k\mathbf{x}$) وقوة الإخماد والقوة المحركة ($F_0 \cos\omega t$) وعند تطبيق قانون نيوتن الثاني على حركة جسم كتلته m فإن معادلة الحركة تصبح :

$$m\frac{d2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx - F_0 \cos\omega t = 0` \qquad (7.44)$$

وسنكتفي بالإشارة إلى الحل وشرح ظاهرة الرنين (Resonance) فقط . أما الحل للمعادلة(7.44) فهو :

$$x = A\cos(\omega t + \theta) \qquad (7.45)$$

حيث تكون سعة الذبذبة في هذه الحالة :

$$A = \frac{F_0 / m}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\omega\omega_b)^2]^{1/2}} \qquad (7.46)$$

وفي الحالة التي يكون التردد الزاوي ω للقوة F مساويا للتردد الزاوي الطبيعي ω_0 للجسم المهتز دون إخماد عندها نقول إن الجسم قد تناغم في تردده مع

القوة المحركة وتعرف هذه الحالة بحالة الرنين حيث تصل سعة الذبذبة للجسم قيمتها العظمى أي :

$$A = \frac{F_0 / m}{2\omega\omega_b} \tag{7.47}$$

ويسمى هذا التردد بالتردد الرنيني (Resonance frequency) . نلاحظ أيضاً أن سعة الذبذبة تصل إلى مالانهاية في غياب قوة الإخماد أي عندما تكون $\omega_b = 0.0$

مثال 7.13

ربط جسم كتلته $10.0g$ بطرف حلزون يتحرك حركة دورية مخمدة. إذا كان ثابت الزنبرك $50.0 dyne/cm$ وكانت قوة الإخماد المناظرة لسرعة خطية قدرها $15.0 cm/s$ هي $300.0 dyne$ وإذا كانت الإزاحة الابتدائية $10.0 cm$ فعين موضع الجسم عند أي لحظة واحسب السعة .

الحل :

لدينا المعادلة

$$m\frac{d2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

وحيث إن قوة التخميد هي

$$F = b\frac{dx}{dt}$$

فإن

$300.0 dyne = (15.0 cm/s) b$ ومنها فإن $b = 20.0 g.s^{-1}$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه فإن

$$10\frac{d2x}{dt^{2}} + 20\frac{dx}{dt} + 50x = 0$$

والتي لها الحل العام .

$$x = ae^{-bt/2m}\cos(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

حيث a هي السعة. هذا الحل يمكن كتابته أيضا بالصيغة

$$x = e^{-bt/2m}(A\cos\omega_b t + B\sin\omega_b t)$$

وحيث إنه عند $t = 0.0$ تكون $x = 10.0cm$ فإن $A = 10.0cm$

إذن

$$x = e^{-t}(10\cos t + B\sin t)$$

وبالتفاضل نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = -x + e^{-t}(-10\sin t + B\cos t)$$

ومن الشروط الابتدائية عند $t = 0.0$ و $\frac{dx}{dt} = 0.0$ فإن

$- 10.0cm + B = 0$ ومنها فإن $B = 10.0cm$

إذن يكون للحل الصيغة

$$x = 10e^{-t}(\cos t + \sin t) \qquad (2)$$

ولمعرفة زاوية الطور θ فإننا نساوي المعادلتين (1) و (2) لنحصل على

$$10\cos t + 10\sin t = a(\cos t\cos\theta + \sin t\sin\theta)$$

من هـذه المعادلة نجد أن

$10 = a\cos\theta$ و $10 = a\sin\theta$

وبقسمة المعادلة الثانية على المعادلة الأولى فإن

$\tan\theta = 1$ أي أن $\theta = \frac{\pi}{4}$

وبالتعويض عن θ فإن

$a = 10\sqrt{2}cm = 14.14cm$

أي أن سعة الموجة هي

$(14.14e^{-t})$

وبالتعويض عن السعة في المعادلة (1) فإن موضع الجسم عند أي لحظة هو

$x = 14.14e^{-t}\cos(t + \frac{\pi}{4})$

مسائل

1- أثرت قوة سحب أفقية على جسم كتلته $0.2kg$ ربط بزنبرك ثابت الإعادة له $100.0N/m$ بدأ الجسم حركته التوافقية بطاقة كامنة $0.5J$ وطاقة حركة $0.3J$ احسب :

أ-السعة ، التردد ، الزمن الدورى ، التردد الزاوي .

ب- الطاقة الكامنة عند إزاحة تساوى نصف السعة .

ج-الإزاحة التى عندها تتساوى طاقتا الحركة والكمون .

د-السرعة عند منتصف المسار.

2- يتحرك جسم توافقيا بتردد $5.0\ Hz$ وسعة $15.0\ cm$ احسب :

أ- القيمة الكبرى للسرعة والتسارع.

ب- السرعة والتسارع عند إزاحة $8.0\ cm$.

ج- الزمن اللازم ليتحرك الجسم من نقطة الاتزان إلى نقطة تبعد $10.0\ cm$ عنها.

3 - علق جسم كتلته $0.5\ kg$ في زنبرك يصنع 5.0 ذبذبات في الثانية وسعته $5.0cm$. احسب طاقة الحركة له عند إزاحة $2.5\ cm$.

4 - ربط جسم كتلته $0.5kg$ في زنبرك أفقي وعلى سطح أملس. عند تحريكه صنع 5.0 ذبذبات في الثانية. إذا أستبدل الجسم بآخر كتلته $0.25kg$ ، فكم يكون عدد الذبذبات في الثانيه؟

5- ربط جسم كتلته m في زنبرك أفقي وعلى سطح أملس. عند تحريكه كان تردده 1.0Hz، عند اضافة جسم آخر كتلته 1.5kg أصبح التردد 0.5Hz. احسب كتلة الجسم.

6 – جسم كتلته $250.0\ g$ ربط بحلزون ثابتة $250.0\ N/m$ ..عند الزمن صفر بدأت الحركة بإزاحة ابتدائية قدرها $10.0cm$ لتبدأ الحركة بسرعة قدرها $10.0m/s$. احسب :

أ – الزمن الدوري و التردد الزاوي . ب – الطاقة الكلية .

جـ – سعة الموجة . د – زاوية الطور .

هـ – أقصى سرعة وأقصى تسارع . و – مكان وسرعة وتسارع المكان عند زمن قدره $5.0\ sec$.

7– مكبس ماكينة سيارة يتحرك توافقيا وكان طول الأسطوانة $7.0cm$ وتردد دوران الماكينة $60.0rev/s$ وكتلة المكبس $0.5kg$. **احسب**:

أ – تسارع المكبس عند نهاية الأسطوانة .

ب – قوة الإعادة عند نهاية الأسطوانة .

ج – سرعة المكبس عند منتصف الأسطوانة .

8– يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة ومعادلة حركته هي

$$x = 0.15\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

احسب ما يلي :

أ – سعة الذبذبة ، زمنها ، ترددها ، وثابت الطور لها .

ب– موقع الجسم وسرعته وتسارعه بعد ثلاث ثوان من ابتداء الحركة .

ج – القيمة العظمى للسرعة والتسارع .

9- يتحرك جسم كتلته $100.0g$ حركة توافقية بسيطة وفقا للمعادلة

$$x = a\cos(\omega t + \phi_0)$$

إذا كان تردده $4.0Hz$ وسرعته $9.0m/s$ عندما كان موقعه $0.2m$ احسب :

أ – السعة ، زاوية الطور والزمن الدورى .

ب – الطاقة الكلية للجسم .

ج – عين موقع الجسم بعد 3.0 ثوان .

10- علق جسم وزنه $50.0\ N$ من حلزون رأسي فاستطال $10.0\ cm$ حرك الجسم ليتحرك بتردد $1.5\ Hz$.

أ – احسب كتلة الجسم .

ب – احسب مكان الجسم واتجاهه عند زمن قدره $0.25sec$.

ج – احسب قوة الإعادة عند إزاحة $2.0\ cm$ تحت نقطة الاتزان .

11- علق جسم كتلته $5.0\ kg$ من حلزون . عند هزه كان تردده $2.0Hz$. كم النقص في طوله عند ازاحة الجسم ؟

12- ربط جسم كتلته $0.2\ kg$ بخيط طوله $1.0m$ حرك حركة بندولية . إذا كان طول القوس الذي يتحرك عليه الجسم $10.0\ cm$ فاحسب :

أ – تردد الجسم و سعة الذبذبة .

ب – السرعة الزاوية الكبرى وأكبر تردد زاوي .

ج – السرعة عندما يكون الجسم عند $\theta = 1.0\times10^{-2}\ rad$.

13- طفل كتلته $20.0kg$ يجلس في أرجوحة طولها L أعطيت إزاحة أفقية مقدارها $0.5\ m$ ليتحرك الطفل حركة توافقية بسيطة وبزمن دوره $15.0sec$ احسب:

أ – التردد الزاوي و طول الخيط .

ب – السعة الزاوية وأكبر سرعة زاوية، وكذلك أكبر تسارع زاوي .

ج – سرعة الطفل الخطية عند نقطة الاتزان .

د– السرعة الزاوية عند البعد الزاوي $\theta = 2.5^\circ$

14 – سلك خفيف يمكن إهمال وزنه طوله L يهتز حول أحد طرفيه ويحمل ثلاثة أجسام كتلها متساوية ، m ، وعلى الأبعاد $\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}, L$ من نقطة التعليق .

احسب زمن الذبذبة .

15 – بندول بسيط زمنه الدوري $2.0\ sec$ احسب الزمن الدورى لهذا البندول على سطح القمر حيث $g_m = 1.7 m/s^2$

16– طفل وزنه $160.0N$ يجلس في أرجوحة طولها $1.5m$. أعطي إزاحة أفقية مقدارها $0.4m$ فبدأ الطفل يتحرك توافقياً وبزمن دوري يساوي $10.0\sec$.

أ– احسب طول الأرجوحة . ب– احسب السعة الزاوية .

ج– استنتج معادلة الحركة للطفل .

د– احسب سرعة الطفل الخطية والزاوية عند نقطة الاتزان .

هـ– احسب أكبر عزم زاوي على محور الدوران .

17– أسطوانة مفرغة نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها L وكتلتها M علقت من أحد طرفيها لتهتز اهتزازا توافقيا . احسب زمنها الدورى ثم احسب الزمن الدوري لو كانت مصمتة.

18 – مسطرة منتظمة طولها L تهتز حول نقطة تبعد مسافة X من مركزها .

أ – اثبت أن التردد الزاوى يعطى بالصيغة $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,X}{L^2/12 + X^2}}$.

ب – اثبت أن أكبر قيمة للتردد الزاوي يكون عند $\left(X = \dfrac{L}{\sqrt{12}} \right)$.

ج – ما طول المسطرة عندما يأخذ التردد الزاوي القيمة $2\pi\, rad/s$.

الباب الثامن

الحركة الموجية

Wave Motion



مقدمــة

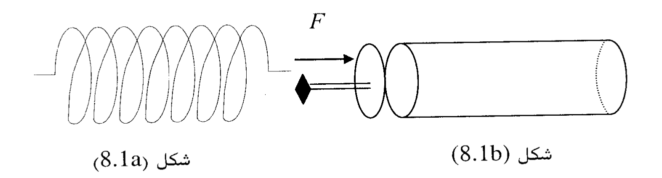
نفرض وسطاً مرناً مكوناً من عدد كبير من الجسيمات المتصلة ببعض. إذا أحدثنا اضطراباً في طرف الوسط فإنه يتولد قوة مرنة في المادة المجاورة للاضطراب ثم ينتقل إلى الجسيم المجاور ثم الذي يليه وهكذا، وعليه فإن الانتقال يتم بسرعة محددة. ولنأخذ الأشكال المرفقة لتوضيح ماسبق. فالشكـل (8.1a) وهو سلك حلزوني مشدود فإذا سحبت النهاية اليسرى في اتجاه عمودي عبر محور السلك فإننا نلاحظ أن الهزة قد انتقلت في السلك، ونقول إن لدينا اهتزازاً مستعرضاً Transverse وتبعاً لهذا نعرف الموجة المستعرضة :

" **بأنها الموجة التي تهتز فيها جزيئات الوسط في اتجاه عمودي على اتجاه سريان الاضطراب أو الموجة**". ومن أهم الأمثلة على هذا النوع الموجات الكهرومغناطيسية وهي لاتحتاج إلى وسط مادي لانتقالها ومن أمثلتها الموجات الضوئية. أما الشكل (8.1b) فيمثل وسطاً مائعاً أو غازياً محصوراً في أنبوبة مغلقة في نهايتها اليسرى مكبس يمكن تحريكه. إذا حرك المكبس حركة خفيفة فإن اضطراباً ينتقل في الوسط داخل الأنبوب. هذا الاضطراب يسمى اضطراباً طولياً Longitudinal وتبعاً له تعرف الموجة الطولية :

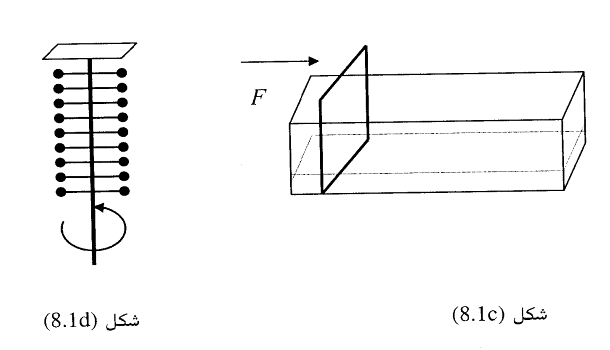
" **بأنها الموجة التي يتوازى فيها اتجاه حركة الجزيئات مع اتجاه الموجة**".

ومن أمثلتها الموجات الصوتية ولها سرعات منخفضة مقارنةً بسرعات بالموجات المستعرضة. وهناك أنواع أخرى من الاضطراب يتلازم فيه الاضطراب المستعرض مع الاضطراب الطولي، ويبين ذلك الشكل (8.1c) حيث يوجد مائع محصور في وسط وفي طرفه قطعة خشبية تولد بحركتها انتقالا للمائع وهو في نفس الوقت انتقال للموجة. وهناك نوع آخر هو الانتقال اللحظي ويوضحه الشكل (8.1d) إذ أنه بلف

القضيب الوسطي في الشكل تهتز الكرات في الحوامل.



شكل (8.1a)   شكل (8.1b)



شكل (8.1d)   شكل (8.1c)

8.1 سرعة الموجة المستعرضة Speed of a Transverse Wave

تحسب سرعة الموجة المستعرضة v بدلالة كميتين فيزيائيتين هما الكتلة لكل وحدة طول للخيط والشد في الخيط على اعتبار أن الجسم المهتز هو خيط مشدود من طرفيه وأحدث به اضطراباً.

فإذا كان T يمثل الشد وL يمثل طول الخيط و m يمثل كتلته فإن الكتلة لكل وحدة طول هي $\mu = m/L$. عند الزمن $t = 0$ تطبق قوة مستعرضة على نهاية الخيط اليسرى.

فإذا أخذنا مقطعاً علوياً طوله Δs على شكل قوس حيث يتم السحب فإنه يتأثر بالشد T من الطرفين كما في الشكل (8.2) .

فإذا اعتبرنا القوس Δs هو جزء من دائرة نصف قطرها R فإن مركبة القوة على محور x تساوى صفراً إذ تلغي المركبتان بعضهما، أما القوة المركزية فهي $F_r = 2T\sin\theta$ ، لكننا نعلم أن المركبة الرأسية للقوة في الحركة الدائرية هي $F = ma$ حيث $a = \frac{v^2}{R}$ و m هي كتلة الجزء Δs .

أي أن

$$2T\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

لكن

$$\sin\theta \approx \frac{\Delta s}{2R}$$

إذن

$$2T\left(\frac{\Delta s}{2R}\right) = \frac{mv^2}{R}$$

أي أن

$$v^2 = T\frac{\Delta s}{m}$$

أو

$$v^2 = \frac{T}{\mu}$$

ونحل بالنسبة للسرعة v

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.1)$$

$T\cos\theta$ $T\cos\theta$ $\Delta s/2$ θ T R θ R T $2T\sin\theta$

شكل (8.2) قوس متأثر بالشد T

مثال 8.1

خيط طوله $1.5m$ وكتلته $150.0g$ ربط أحد طرفيه بحائط والآخر تدلى منه جسم كتلته $4.0kg$. احسب سرعة نبضة تمر فيه والزمن الذي تستغرقه .

الحل:

الشد في الخيط يساوي وزن الجسم المدلى

$$T = mg = 4.0kg \times 9.8\ m/s^2 = 39.2\ N$$

كتلة وحدة الأطوال μ هي

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.15kg}{1.5m} = 0.1\ kg/m$$

وعليه فإن السرعة هي

$$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}=\sqrt{\frac{39.2N}{0.1kg/m}}=19.8m/s$$

الزمن الذي تستغرقه النبضة هو

$$t=\frac{x}{v}=\frac{1.5m}{19.8m/s}=0.76\ \sec$$

مثال 8.2

شُد سلك للربط الكهربي بين برجين المسافة بينهما $300.0m$ وكتلة السلك $60.0kg$، إذا وجد على أحد البرجين مراقب وقام بضرب السلك فإن موجة تنتقل إلى البرج الآخر ثم تعود إلى المراقب في زمن قدرة $10.0sec$.

احسب قوة الشد في السلك .

الحل:

المسافة التي قطعتها الموجة هي $600.0m$

سرعة الموجة $v=\frac{600.0m}{10.0s}=60.0\ m/s$

وحيث إن قوة الشد تعطى من العلاقة

$$F=\mu v^2$$

فإن

$$F=\frac{m}{L}v^2=\left(\frac{60.0kg}{300.0m}\times 60.0^2 m^2/s^2\right)=720.0\ N$$

مثال 8.3

سلك معدني معامل يونج له $1.5\times10^{11}Pa$ وكثافة مادته $7.0\times10^3\frac{kg}{m^3}$

ومعامل التمدد الحراري الطولي له $1.5\times10^{-5}/C^{o}$ ،ربط بين ثابتين وكان الشد به صفر عند درجة حرارة $30.0^{\circ}C$. عين قيمة سرعة موجة مستعرضة تمر به عندما تنخفض درجة الحرارة إلى $10.0^{\circ}C$.

الحل:

لدينا من المعادلة (4.7)

$$\frac{\Delta L}{L}=\alpha\Delta T=-1.5\times10^{-5}C^{-1}(10.0-30.0)C^{o}=3\times10^{-4}$$

وكذلك لدينا من معادلة الإجهاد الطولي (معادلة 3.10)

$$\frac{\Delta L}{L}=\frac{F}{YA}$$

ومنها فإن

$$\frac{F}{A}=\frac{\Delta L}{L}\times Y=3\times10^{-4}\times1.5\times10^{11}Pa=4.5\times10^{7}Pa$$

ولحساب سرعة الموجة فإن

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F}{m/L}}=\sqrt{\frac{FL}{\rho V}}$$

$$=\sqrt{\frac{FL}{\rho AL}}=\sqrt{\frac{F}{A\rho}}=\sqrt{\frac{4.5\times10^{7}Pa}{7\times10^{3}kg/m^{3}}}=80.2m/s$$

8.2.a سرعة الموجة الطولية Speed of a Longitudinal Wave

يمثل الشكل (8.3) أسطوانة أحد طرفيها ثابت والآخر به مكبس ويملأ الأسطوانة مائع (غاز أو سائل) كثافته ρ ويمثل الشكل الأول حالة المائع قبل تحريك المكبس أي عند $t=0$. نحرك المكبس إلى اليمين بسرعة u ، ويمثل الشكل الثاني الحالة بعد تحريك المكبس وإحداث ضغط إضافيّ قدره Δp. بعد زمن t نجد أن المكبس تحرك مسافة قدرها ut بينما تحركت الموجة مسافة قدرها vt حيث v هي سرعة الموجة.

كتلة المائع في منطقة حركة الموجة هي

$$m = \rho V = \rho xA = \rho vtA$$

كمية الحركة الطولية لهذه الكتلة هي

$$mu = \rho\ vtAu$$

نحسب بعدها الزيادة في الضغط ، ΔP ، نتيجة حركة المكبس. حيث إن الحجم الكلي للمائع هو Avt وحجم الجزء الناقص منه نتيجة حركة المكبس هو Aut فإنه بالتعويض في معادلة معامل المرونة الحجمي،

$$B = \frac{\text{التغير في الضغط}}{\text{التغير النسبي في الحجم}} = \frac{\Delta P}{Aut / Avt}$$

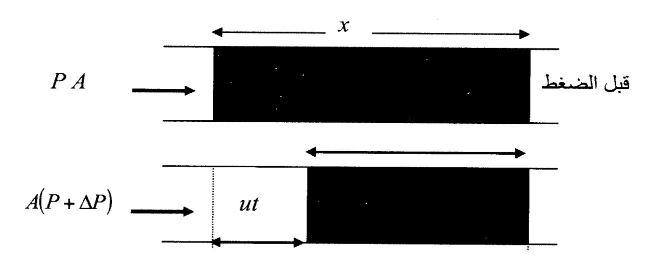
نجد أن

$$\Delta P = B\frac{u}{v}$$

صافي القوة المؤثرة على المائع هي ΔPA ويعطى الدفع الطولي بدلالتها كالآتي:

$$J = Ft = \Delta PAt = B\frac{u}{v}At$$

أشكال الفصل الثامن



شكل (8.3) أسطوانة بها مائع أحد طرفيها ثابت والآخر به مكبس

وبتطبيق قاعدة تساوي الدفع مع كمية الحركة نجد أن

$$\rho A v t u = B \frac{u}{v} A t$$

ومنه فإن

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{8.2}$$

أي أن سرعة موجة طولية تتحرك داخل مائع يعتمد فقط على معامل المرونة للسائل وكثافته. أما حين تتحرك الموجة في وسط صلب فإن السرعة الطولية تُصبح على الشكل

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{8.3}$$

حيث Y هو معامل يونج الذي سبق تعريفه .

8.2.b سرعة الموجة الطولية في الغاز المعزول حراريًا

Speed of a longitudinal wave in adiabatic gas .

في حالة الغاز المثالي المعزول حرارياً ، $\Delta Q = 0$ ، adiabatic . يمكن استنتاج سرعة موجة طولية تتحرك داخل وسط مثالي بدلالة وزنه الجزيئي ودرجة الحرارة والثوابت γ و R .

في حالة الغاز المعزول حرارياً أثبتنا في باب سابق (مثال 6.9) إن:

$$P V^{\gamma} = \text{ثابت} \tag{8.4}$$

حيث

$$\gamma = \frac{\text{الحرارة النوعية مع ثبات الضغط}}{\text{الحرارة النوعية مع ثبات الحجم}} = \frac{C_P}{C_V}$$

لكن

$$B = -V\frac{dP}{dV} \tag{8.5}$$

وبتفاضل المعادلة (8.4) نصل إلى

$$V\frac{dP}{dV} = -\gamma P \tag{8.6}$$

وبمقارنة المعادلتين (8.5) و (8.6) نجد أن

$$B_{ad} = \gamma P \tag{8.7}$$

B_{ad} هو المعامل الحجمي للسائل المعزول حرارياً.

لكن السرعة هنا تعطى بالعلاقة

$$v = \sqrt{\frac{B_{ad}}{\rho}}$$

أي أن

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{8.8}$$

لكن لدينا القانون العام للغاز المثالي

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

أو

$$P\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M}RT$$

ومنها يكون

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

وبالتعويض عن P/ρ في المعادلة (8.8) نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (8.9)$$

وهذه سرعة موجة طولية تمر في غاز مثالي معزول حرارياً.

مثال 8.4

تتحرك موجة طولية في قضيب من الألمونيوم. احسب سرعتها .

الحل:

حيث إن

$$\rho_{Al} = 2.7\times10.0^{3}\frac{kg}{m^{3}} \quad و \quad Y_{Al} = 7\times10.0^{10}\,Pa$$

فإنه باستخدام المعادلة (8.3) نجد أن

$$v_{Al} = \sqrt{\frac{7.0\times10.0^{10}\,Pa}{2.7\times10.0^{3}\,kg/m^{3}}} = 5100.0\text{m/s}$$

وهي سرعة مثالية في المواد الصلبة وبمقارنتها بالسرعات في الموائع نجدها أكبر منها بكثير.

مثال 8.5

احسب سرعة موجة طولية تتحرك في الماء حيث معامل المرونة الحجمي للماء حوالي $2.04\times10.0^{9}\,N/m^{2}$ وكثافة الماء $10.0^{3}\,kg/m^{3}$

الحل:

$$v_{water} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.04\times10.0^{9}\,Pa}{10.0^{3}\,kg/m^{3}}} = 1428.6\text{ m/s}$$

وهي سرعة صغيرة مقارنة بسرعة الموجة الطولية المارة في قضيب الألومنيوم أما

سرعة الموجة الطولية في الهواء فإن سرعتها تقارب ربع سرعتها في الماء.

مثال 8.6

احسب سرعة الصوت في الهواء عند درجة حرارة $30.0^{\circ}C$ حيث $\gamma = 1.4$ و $M = 28.8\times10^{-3}\,kg/mol$ و $R = 8.314\ J/mol.K$.

الحل:

لحساب سرعة الصوت في الهواء نستخدم المعادلة (8.9)

$$v = \sqrt{\frac{1.4\times(8.314\ \text{J/mol.k})(303.0k)}{28.8\times10^{-3}kg.mol^{-1}}} = 350.0m/s$$

مثال 8.7

سلك نحاس مساحة مقطعه $1.0cm^{2}$ مشدود بقوة F . حدد قيمة هذه القوة بحيث إذا مر بالسلك موجة طولية وموجة مستعرضة فإن لهما نفس السرعة. هل يمكن حصول هذه الظاهرة ؟

الحل :

في هذا المثال تتساوى سرعتا الموجتين المستعرضة والطولية، أي أن

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

وبتربيع الجذرين وإعادة الترتيب فإن القوة:

$$F = \frac{\mu Y}{\rho} = \frac{(m/L)Y}{m/V} = AY = 1\times10^{-4}m^{2}\times9.1\times10^{11}Pa = 9.1\times10^{7}N$$

لكننا نعلم أن $Y = \dfrac{F/A}{\Delta L/L}$ وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة أعلاه فإن هذا يعني أن $\dfrac{\Delta L}{L} = 1$ أي أن الاستطالة تساوي الطول الأصلي وهذا غير ممكن إذ أن السلك

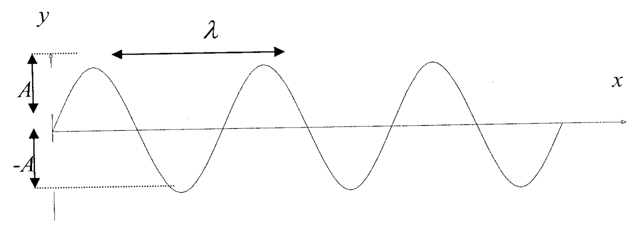
ينكسر قبل استطالته هذه . وعليه فإنه لا يمكن سير الموجتين بسرعة واحدة دون كسر السلك والصحيح أن الموجة الطولية دائما تسير بسرعة أعلى من سرعة الموجة المستعرضة في السلك المشدود .

8.3 الموجات التوافقية Harmonic Waves

في هذا الفصل نتعرف على شكل موجي مهم والمعروف بالموجات التوافقية وهي الموجات ذات الشكل الجيبي Sinusoidal Shape كما هي في الشكل (8.4) الذي يمثل لقطة من الموجة عند بداية القياس $t = 0$ ويمكن تمثيل الإزاحة عند الزمن $t = 0$ بالمعادلة :

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{8.10}$$

حيث A هو السعة Amplitude ويمثل أكبر قيمة للإزاحة y . و يسمى الثابت λ بطول الموجة Wavelength ويساوي المسافة بين أي قمتين متتاليتين أو بين أي نقطتين متتاليتين لهما نفس الطور، (انظر باب الحركة التوافقية البسيطة). والمعادلة (8.10) هي صيغة أخرى للمعادلة (7.21) حيث أستخدم y مكان x و $\frac{x}{v}$ مكان t ومن الشكل نلاحظ أن الإزاحة الرأسية تكرر نفسها عندما يزيد x بقيم مضاعفة لطول الموجة. إذا تحركت الموجة بسرعة v فإن الدالة الموجية عند زمن t تعطى بالمعادلة :



شكل (8.4): شكل الموجة عند الزمن $t = 0$

$$y = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \tag{8.11}$$

حيث أعيد كتابة المعادلة (8.10) عند نقطة تسبق x بإزاحة قدرها vt لاحظ أن هذه هي دالة موجية بالشكل $f(x - vt)$ وتتحرك نحو اليمين أما الدالة $f(x + vt)$ فإنها تمثل حركة الموجة إلى اليسار. ونعلم مما سبق أن

$$\lambda = v\tau \tag{8.12}$$

حيث τ هو الزمن الدوري، وبالتعويض عن السرعة نعيد كتابة المعادلة (8.12) على الصورة

$$y = A\sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau})] \tag{8.13}$$

وهذه معادلة دورية أي أن y تكرر نفسها عند الزمن $t + 2\tau\, , t + \tau\, , t$ أو عند الإزاحة $x + 2\lambda\, , x + \lambda\, ,\ x$ ...، وهكذا.

ويمكن كتابة الدالة التوافقية بشكل أفضل وذلك باستخدام العدد الموجي k Wave number أو ما يعرف بثابت الانتشار Propagation Constant والتردد الزاوي ω حيث

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{8.14}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \tag{8.15}$$

لتكون

$$y = A\sin(kx - \omega t) \tag{8.16}$$

من المعادلات (8.12) ، (8.14) و (8.15) يتضح أن

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad (8.17)$$

و

$$v = \lambda f \qquad (8.18)$$

حيث f هو التردد.

تبين المعادلة (8.16) أنه عند $x = 0.0$ و $t = 0.0$ تكون الإزاحة $y = 0.0$ وهذه ليست دائماً صحيحة إذ أنه يمكن وجود إزاحة ابتدائية y_0 وللحصول عليها نكتب المعادلة بصيغة عامة هي

$$y = A\sin(kx - \omega t - \phi) \qquad (8.19)$$

حيث ϕ يسمى ثابت الطور Phase Constant وتكتب في حالة الحركة إلى اليسار على الصورة

$$y = A\sin(kx + \omega t + \phi) \qquad (8.20)$$

ولمعرفة سرعة الجسيم المهتز وتسارعه، سرعة اضطراب الوسط وتسارعه ، فإننا نجري التفاضل الجزئي على المعادلة (8.16)

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(k\,x - \omega\, t)$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) \qquad (8.21)$$

$$= -\omega^2 y$$

وبالتفاضل الجزئي بالنسبة لـ x نحصل على ميل المنحنى عند أي نقطة وإذا فاضلنا ثانية نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (-k^2)A\sin(kx - \omega t) \qquad (8.22)$$

ويتبع من المعادلتين (8.21) و (8.22) أن

$$\frac{\partial^2 y / \partial t^2}{\partial^2 y / \partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \qquad (8.23)$$

والمعادلة الجزئية

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (8.24)$$

من أهم معادلات الفيزياء وتسمى معادلة الموجة Wave Equation وحيث ما تحققت فإنها تعني أن y تتقدم كدالة مسافرة عبر محور x وبسرعة موجية v.

مثال 8.8

حبل مشدود بقوة قدرها *50.0N* وكتلة وحدة الطول له *0.2kg/m* سارت به نبضة توافقية نحو اليمين وبسعة 15.0*cm* وتردد *10.0Hz* ، عند الزمن $t = 0.0$ والإزاحة التوافقية الأفقية $x = 0.0$ كان لها إزاحة رأسية *15.0cm* .

1 - احسب السرعة، طول الموجة، العدد الموجي لها .

2 - اكتب الدالة الموجية لها .

3 - احسب الدالة الموجبة عند الزمن *0.2s* والإزاحة الأفقية *5.0cm* .

4 - احسب السرعة المستعرضة للموجة .

5 - احسب ميل الخيط عند 0.2 s و 0.5 m .

الحل:

1- من المعادلة $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ نحسب سرعة الموجة حيث T هو الشد في الخيط.

$$v = \sqrt{\frac{50.0N}{0.2kg/m}} = 15.8m/s$$

طول الموجة

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{15.8m.s^{-1}}{10.0s^{-1}} = 1.58m$$

العدد الموجي

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.97m^{-1}$$

2- الدالة الموجبة

$$y = 0.15m\sin(3.97x - 62.8t - \phi)$$

ولحساب ϕ بالريديان عند $t = 0.0$ و $x = 0.0$ فإن

$$15.0 = 15.0\sin(-\phi)$$

$$-\phi = \sin^{-1}(1.0) = 90.0^{o} = \frac{\pi}{2}$$

أي أن

$$y = 0.15\sin[3.97x - 62.8t + \frac{\pi}{2}]$$

$$= 0.15\cos[3.97x - 62.8t]$$

حيث إن زاوية الطور هنا 90.0^{o} ومعلوم أن فرق الطور بين $\cos\theta$ و $\sin\theta$ هو $\frac{\pi}{2}$

3- نعوض عن $t = 0.2\ s$ و $x = 0.05m$

$y = 0.15 \cos[3.97 \times 0.05 - 62.8 \times 0.2]$

$= 0.15 \cos(-10.575 \text{ rad}) = 0.15 \cos(-606^\circ)$

$= 0.15 \times (-0.41) = -6.1 \text{ cm}$

4- السرعة المستعرضة عند أي زمن وفي أي مكان هي

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t - \phi)$$

$= -\omega A \sin(kx - \omega t)$

في هذه المسألة

$u = -62.8 \times 0.15 \sin(3.97 \times 0.5 - 62.8 \times 0.2)$

$= -8.6 \text{ m/s}$

5- حساب الميل

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak \cos(kx - \omega t - \phi)$$

في هذه المسألة

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t)$$

$= 0.15 \times 3.97 \sin(3.97 \times 0.5 - 62.8 \times 0.2)$

$= 0.54$

ولموجة تسير إلى اليسار فإن السرعة المستعرضة سوف تكون موجبة بينما الميل سالباً.

مثال 8.9

مصدران المسافة بينهما 14.0m يهتزان حسب المعادلتين

$y_1 = 0.06 \sin \pi t$ و $y_2 = 0.02 \sin \pi t$

ويرسلان موجات بسرعة $v = 1.5\ m/s$. ما معادلة الموجة المحصلة عند نقطة بينهما تبعد $8.0m$ يمين المصدر الأول وتبعد $6.0m$ يسار المصدر الثاني .

الحل:

لمعرفة المحصلة عند النقطة المحددة نكتب المعادلتين الموجيتين في صورتيهما العامة

$$y_1 = A_1 \sin\left(\omega t - kx_1\right)$$

$$y_2 = A_2 \sin\left(\omega t + kx_2\right)$$

ونعيد كتابتهما اعتماداً على التردد والسرعة

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi f_1 \left(t - \frac{x_1}{v}\right) \qquad (1)$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi f_2 \left(t + \frac{x_2}{v}\right) \qquad (2)$$

حيث x_1 و x_2 هما المسافتان بين النقطة والمصدر الأول والثاني على التوالي أي أن

$x_1 = 8.0\ m$ و $x_2 = -6.0\ m$ وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) بما ورد في السؤال نجد أن

$2\pi f_1 = \pi$ و $2\pi f_2 = \pi$ أي أن $f_1 = f_2 = \frac{1}{2}\ \text{Hz}$

ومنه فإن

$$y_1 = 0.06 \sin \pi \left(t - \frac{8}{1.5}\right) = 0.06 \sin \pi \left(t - \frac{16}{3}\right)$$

$$y_2 = 0.02 \sin \pi \left(t - \frac{6}{1.5}\right) = 0.02 \sin \pi (t - 4)$$

ومن العلاقة

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

فإن

$$y_1 = -0.03\sin\pi t + 0.052\cos\pi t$$

و

$$y_2 = -0.02\sin\pi t$$

ومحصلتهما هي

$$y = y_1 + y_2 = -0.01\sin\pi t + 0.052\cos\pi t$$

ولمعرفة سعة الموجة المحصلة وكذلك لمعرفة زاوية الطور فإننا نكتب المحصلة على الصورة العامة :

$$y = A\sin(\pi t + \phi) = A\sin\pi t\cos\phi + A\cos\pi t\sin\phi \quad (4)$$

وبمقارنة المعادلتين (4) و (3) فإن

$$A\cos\phi = -0.01 \quad (5)$$

و

$$A\sin\phi = 0.052 \quad (6)$$

وبقسمة المعادلة (6) على المعادلة (5) نجد أن

$\tan\phi = -5.2$ ومنها فإن $\phi = -79.1^\circ$

وبتربيع المعادلتين ثم جمعهما نجد أن

$A^2 = 2.804\times10^{-3}m^2$ ومنها فإن $A = 5.3cm$

وبالتعويض عن ϕ و A في المعادلة (4) تكون معادلة الموجة المحصلة هي

$$y = 0.053\sin(\pi t - 1.38rad)$$

8.4 القدرة في الموجات المستعرضة

Power In Transverse Waves

نعلم أن الوسط المهتز ينتج موجات مستعرضة أو موجات طولية كما أشرنا سابقاً. هذه الموجات تحمل طاقة يمكن استنتاج صيغتها الرياضية معتمدين على سرعة و طول الموجة و تردد المصدر. وسوف نبدأ بالموجات المستعرضة. افرض أنه عند زمن t وعلى بعد x من طرف حبل مشدود تم سحب الحبل بقوة مائلة F كما بالشكل (8.5) ، المركبة المستعرضة للشد في الخيط نحو اليسار تعرف بالمعادلة:

$$F_{trans} = -F\frac{dy}{dx}$$

حيث $\frac{dy}{dx}$ يمثل ظل الزاوية التي صنعتها قوة الشد إلى أعلى مع محور x .

القدرة (الطاقة المارة بالنقطة x في وحدة الزمن) هي:

$$P = F_{trans}\,U = \left(-F\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dt}$$

حيث $\frac{dy}{dt}$ هي السرعة المستعرضة للموجة.

نفرض أن الموجة المارة بالخيط هي موجة جيبية بالصورة

$$y = y_0 \sin(kx - \omega\, t)$$

وبالتفاضل فإن قيمة الميل عند نقطة الشد هي

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k\, y_0 \cos(kx - \omega\, t)$$

والقوة المستعرضة هي

$$F_{trans} = -F\frac{\partial y}{\partial x} = -F\, k\, y_0 \cos(kx - \omega\, t)$$

أما السرعة المستعرضة للموجة فهي

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega \; y_0 \cos(kx - \omega \, t)$$

وبالتعويض عن الميل والسرعة المستعرضة فإن القدرة عند النقطة x نتيجة الشد المستعرض هي

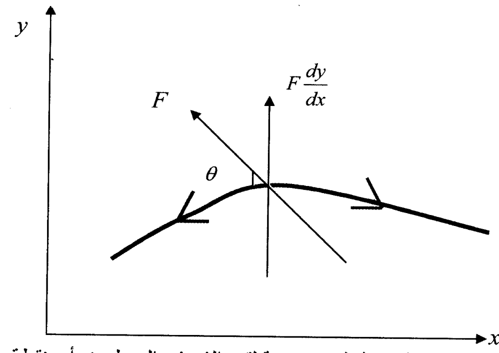
$$P = \omega k \, y_0^2 \, F \cos^2 (kx - \omega)$$

وحيث إن متوسط مربع جيب الزاوية وكذلك متوسط مربع جيب تمام الزاوية يساوي نصف ، فإن متوسط القدرة هو:

$$P_{av} = \frac{\omega k \, y_0^2 \, F}{2}$$

$$= 2\pi^2 f^2 y_0^2 \frac{F}{v} = 2\pi^2 f^2 y_0^2 \mu v \qquad (8.25)$$

وهي معادلة لا تعتمد على x و t ، وقد استخدمنا الصيغة $v = \sqrt{F/\mu}$ للخيط، وبدراسة المعادلة (8.25) نلاحظ أن معدل انتقال الطاقة يعتمد على مربع التردد وكذلك على مربع السعة وهي حقيقة لكل أنواع الموجات.



شكل (8.5) المركبة المستعرضة لقوة الشد في الخيط عند أي نقطة x

8.5 الموجات الموقوفة Standing Waves

تتكون الموجات الموقوفة عندما تتداخل موجتان تتحركان في اتجاهين متضادين. ويمكن مشاهدة الموجات الموقوفة بسهولة فمثلاً إذا ربط حبل من أحد طرفيه ثم هز الطرف الآخر باليد وبتغيير التردد نجد أننا نصل إلى وضع تتكون فيه هذه الموجات وعادة ما نجري التجربة باستخدام شوكة رنانة يثبت في أحد طرفيها خيط خفيف يمر على بكرة يعلق بطرفه وزن وبتغيير بعد الشوكة عن مكان التعليق نحصل على البطون والعقد المطلوبة وتسمى بتجربة ميلد Meld's Experiment ولإيجاد الدالة الموجية لموجة موقوفة فإننا نمثل الموجة الساقطة والموجة المنعكسة بدالتين يتماثلان في السعة والتردد وطول الموجة. الموجة الساقطة y_1 هي موجة مسافرة إلى اليمين وتعطى بالمعادلة

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

والموجة المنعكسة y_2 هي موجة مسافرة إلى اليسار وتعطى بالمعادلة

$$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$$

وتكون محصلة الإزاحة لنقطة ما هي حاصل جمعهما وبالاستفادة من الصيغة

$$\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \sin b \cos a$$

نحصل على

$$y = y_1 + y_2 = [2A\sin kx]\cos \omega t \tag{8.26}$$

هذه الصيغة تمثل الموجة الموقوفة. ومن هذه النتيجة نلاحظ أن الموجة الموقوفة لها تردد زاوي ω وتحدد سعتها بالكمية بين القوسين $(2A\sin kx)$ وهذا يعني أن كل جزيء في الخيط المهتز له حركة توافقية بسيطة وبنفس التردد . أما سعة الهزة للجزيء فإنها تعتمد على قيمة x . وبالمقارنة بحركة الموجة الواحدة نلاحظ

الفرق إذ أن الموجة الواحدة لها تردد زاوي واحد ولها سعة ثابتة.

وحيث إن سعة الموجة الموقوفة تعتمد على x فإن أكبر قيمة للسعة هي $2A$ وهذه تحصل عند تحقق الشرط $\sin kx = \pm 1$ أو عندما

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$$

وحيث إن $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ فإن مواقع البطون antinodes تحدد بالقيم الآتية :

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ... = \frac{n\lambda}{4} \qquad (8.27)$$

حيث $n = 1,3,5,.....$ ونلاحظ أن البطنين المتجاورين يفصل بينهما المسافة $\frac{\lambda}{2}$ وبالمثل فإن الموجات الموقوفة لها سعة صفرية عندما تحقق x الشرط $\sin kx = 0.0$ أو عندما

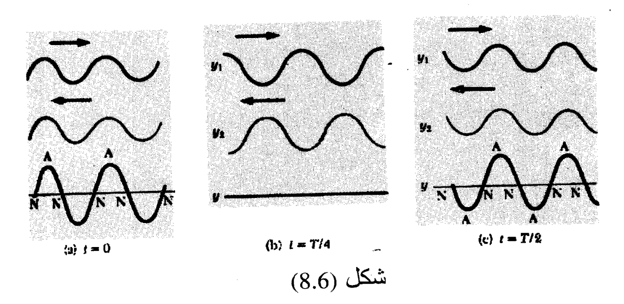
$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, ...$$

والتي تعطي

$$x = \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, ... = \frac{n\lambda}{2} \qquad (8.28)$$

حيث $n = 0,1,2,3,.....$ وهذه النقاط تدعى العُقد nodes والتي كذلك يفصل بين كل عقدتين متتاليتين نصف طول موجة $\frac{\lambda}{2}$, أما المسافة بين عقدة وبطن مجاور لها فإنها ربع الموجة $\frac{\lambda}{4}$, ويظهر لنا الشكل (8.6) رسماً لموجتين متعاكستين ولقيم زمنية مختلفة، وفيه نلاحظ أنه عند الزمن $t = 0.0$ كانت للسعة أكبر قيمة، $2A$ انظر الشكل (8.6a). وعند الزمن $t = \frac{\tau}{4}$ فإن $\cos\omega t = 0.0$ أي أن المحصلة تساوي الصفر، وهذا يعني أن للموجتين إزاحتين متساويتين ومتعاكستين لكل قيم x وهنا لدينا ما يعرف بالهدم destructive . أما عند الزمن

$t=\frac{\tau}{2}$ فيلاحظ تماثل الموجتين وتطابق البطون لهما مما يقوي المحصلة وهو ما حدث عند الزمن $t = 0.0$ ، أي أن لدينا ما يعرف بالبناء constructive.



شكل (8.6)

8.6 الموجات الموقوفة في خيط ثبت من طرفيه

Standing Waves in a string fixed at both ends

والآن نأخذ خيطاً طوله L ثُبت من نهايتيه وسارت به موجة والتي تنعكس عند نقطتي التثبيت، شكل (8.7) . ان استمرار الموجات الواردة والموجات المنعكسة يشكل موجات موقوفة تحوي مجموعة من العقد والبطون، وأقل عدد للعقد هو عقدتان تتشكلان عند الطرفين المثبتين ويتشكل بينهما بطن واحد. وفي هذا الحال فإن طول الخيط يعادل $\frac{\lambda}{2}$: $\lambda_1 = 2L$ أو $L=\frac{\lambda_1}{2}$

أما الشكل المتوقع بعد ذلك فهو الحصول على عقدة في منتصف الخيط وفي هذا الحال فإن طول الخيط يعادل طول الموجة، $\lambda_2 = L$. وبالحصول على عقدتين فإن طول الخيط يعادل $\frac{3\lambda}{2}$ أو $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$. وعلى العموم فإن العلاقة بين طول الموجة وطول الخيط لعدد n من البطون هو

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad (n=1,2,3,4,.....) \quad (8.29)$$

ونحصل على التردد المرافق لِتشكُل هذه البطون من العلاقة $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ حيث سرعة الموجة v هي قيمة ثابتة لكل الترددات. وبالتعويض عن طول الموجة نحصل على صيغةٍ عامةٍ للترددات تعتمد على عدد البطون.

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}, \qquad (8.30)$$

وحيث إن $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ، وT هي قوة الشد في الخيط وμ كتلة وحدة الطول، فأنه يمكن كتابة التردد للخيط المسحوب بالآتي:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.31)$$

ويـــسمى أقـــل تـــردد المـــصاحب لطـــول الموجـــة λ_1 بـــالتردد الأساســـي Fundamental Frequency ، $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$ ، أي أن:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.32)$$

ومن الواضح أن الترددات الأخرى والتي تسمى أحياناً **بالنغمات Tones** أو **التوافقيات Harmonics** هي المضروب العددي للتردد الأساسي، أي أن

$f_2=2f_1$, $f_3=3f_1$,...... وهذه المجموعة مع f_1 تسمى سلسلة التوافق أو التناغم وفي هذه السلسلة تسمى f_2 النغمة الأولى و f_3 النغمة الثانية وهكذا.

بطن
عقدة
$\lambda/2$

شكل رقم (8.7) الموجة الموقوفة

ويمكن الحصول على النتيجة في المعادلة (8.29) بمساواة الإزاحة y في المعادلة (8.26) بالصفر وهذا يحصل عند جميع العقد ومنها العقدة عند x = L .

أي عند $\sin kL = 0$ وهذا يتحقق عند $kL = n\pi$ أو عند $l\dfrac{2\pi}{\lambda} = n\pi$

أي أن

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

مثال 8.10

لدينا موجة موقوفة تنتج بتداخل الموجتين التاليتين :

$$y_1 = 0.5 \sin (3\pi t - 5x)$$

$$y_2 = 0.5 \sin (3\pi t + 5x)$$

عين الموجة المحصلة و قيمة السعة لهذه الموجة عند إزاحة $x = 4.0\ m$.

الحل:

نلاحظ أن الموجتين لهما الصورة

$$y = A\sin\left(\omega t \pm kx\right)$$

أي أنه يمكن كتابة المحصلة بالصورة

$$y = A\left[\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right]$$

$$= 2A\sin\alpha\cos\beta = 2.0 \times 0.5\sin 3\pi t\cos 5x$$

$$= 1.0\sin 3\pi t\cos 5x = 1.0\sin 3\pi t\cos(5 \times 4 \times \frac{360^{\circ}}{2\pi})$$

$$= 0.41\sin 3\pi t$$

وهذه موجة جيبية سعتها عند إزاحة قدرها 4.0m أقل من سعة كلٍ من الموجتين المتداخلتين.

8.7 الموجات الطولية في الأنابيب Vibrations of Organ Pipes

عند دراسة الموجات الطولية داخل الأنابيب فإنه يلزم معرفة حال الأنابيب عند الأطراف والتي لا تخرج عن ثلاث حالات ، فإما أن تكون مفتوحة الطرفين وفي هذه الحالة يتشكل بطنان على الطرفين أو مغلقة الطرفين وفي هذه الحالة يتشكل عقدتان عليهما. أما الحالة الثالثة فهي حال أنبوب أحد طرفيه مغلق والآخر مفتوح وهنا يتشكل على أحدهما بطن وعلى الآخر عقدة. والآن نفصل الحالات الثلاث كالآتي:

الحالة الأولى :

يكون الأنبوب مفتوح الطرفين وبدراسة مجموع الأشكال في (8.8a) نرى أن

العلاقة بين طول الموجة وطول الأنبوب يعطى بالصيغة:

$$\lambda_m = \frac{2L}{m}, \qquad m = 1,2,3,... \tag{8.33}$$

وكذلك نرى أن العلاقة بين التردد وطول الأنبوب يعطى بالصيغة:

$$f_m = \frac{mv}{2L} \tag{8.34}$$

والرسم يبين أماكن تشكل العقد والبطون لقيم مختلفة لكل من f و λ لقيم m

الحالة الثانية: أن يكون أحد الطرفين مغلقاً حيث تكون عقدة والطرف الآخر مفتوح ليتشكل بطن وبدراسة مجموع الأشكال في (8.8b) نرى أن العلاقة بين طول الموجة وطول الأنبوب يعطى بالصيغة:

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m-1} \tag{8.35}$$

وكذلك

$$f_m = \frac{2m-1}{4L} v \qquad , m = 1, 2, 3, ... \tag{8.36}$$

الحالة الثالثة:

أن يكون الطرفان مغلقين وفي هذه الحالة يكون على الطرفين عقداً بدلاً من البطون المتشكلة في حالة الأنابيب مفتوحة الطرفين. وهذه حالة ينطبق عليها صيغ الحالة الأولى تماماً المعادلتين (8.31) و (8.30) والفرق أن البطون والعقد تبادلت المواقع وهنا m تمثل عدد البطون.

مثال 8.11

خيط مشدود بقوة قدرها 50.0 N وكتلة وحدة الطول له 0.2 kg/m.

أ- احسب التردد الأساسي والنغمتين التاليتين لموجة مستعرضة تمر به .

ب- احسب كذلك أطوال الموجات علماً بأن طول الخيط 1.5 m .

$L=\frac{1}{2}\lambda$ $L=\frac{1}{4}\lambda$

$L=\lambda$ $L=\frac{3}{4}\lambda$

$L=\frac{3}{2}\lambda$ $L=\frac{5}{4}\lambda$

L L

a *b*

شكل (8.8) يبين أماكن تشكل العقد والبطون في أنبوب

الحل:

ا- نعلم أن

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

وحيث إنه للنغمة الأساسية لدينا $n = 1$ فإن

$$f_1 = \frac{1}{2.0\times 1.5m}\sqrt{\frac{50.0N}{0.2kg/m}} = 5.27Hz$$

أما النغمتين التاليتين فإن لهما $n = 2$ و $n = 3$ وقيمتيهما الآتي

$$f_2 = 2f_1 = 10.54 \text{ Hz} \qquad f_3 = 3f_1 = 15.81 \text{ Hz}$$

ب- ولمعرفة أطوال الموجات نعوض في المعادلة (8.30)

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1.0} = 2\times1.5m = 3.0m, \lambda_2 = \frac{2L}{2.0} = \frac{2\times1.5m}{2} = 1.5m, \lambda_3 = \frac{2L}{3.0} = \frac{2\times1.5m}{3.0} = 1.0m$$

مثال 8.12

احسب التردد الأساسي والثلاث نغمات التالية لموجة صوتية سرعتها $350.0m/s$ تمر في أنبوب طوله $1.5m$. وذلك في حال أنبوب،

1 – مفتوح الطرفين . 2 – مفتوح من طرف واحد .

الحل:

1– في حالة الأنبوب مفتوح الطرفين يكون

$$f_m = \frac{m\nu}{2L}$$

$$f_1 = \frac{\nu}{2L} = \frac{350m/s}{2\times1.5m} = 116.7\text{Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 233.33 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 350 \text{ Hz}$$

2– في حالة أنبوب مفتوح من طرف واحد فإن

$$f_m = \frac{2m-1}{4L}\nu$$

$$f_1 = \frac{1\times350m/s}{4\times1.5m} = 58.33Hz$$

$$f_2 = \frac{3}{4}\frac{\nu}{L} = 175\text{Hz}$$

$f_3 = \frac{5}{4}\frac{\nu}{L} = 291.7\text{Hz}$

أو

$f_2 = 3f_1 = 3 \times 58.33\text{Hz} = 175\ \text{Hz}$

$f_3 = 5f_1 = 5 \times 58.33\ \text{Hz} = 291.7\ \text{Hz}$

مســائل

1- إذا وصفت موجة متحركة بالمعادلة

$$y = 0.3\cos\frac{\pi}{3}(x - 16.0t)$$

فاحسب مقيساً المسافة بالسم والزمن بالثانية

أ - سعة الموجة ، العدد الموجي ، سرعة انتشار الموجة ، التردد ، الزمن الدورى ، والتردد الزاوي .

ب- احسب الإزاحة الراسية و سرعة اضطراب الوسط عند x = 0.2 cm

و t =0.1s

2- إذا كان تردد مصدر موجي $3.0Hz$ وطول الموجة له 0.5 m فاحسب سرعة الموجة وعددها الموجى .

3- حبل طوله $2.0m$ وكتلته $50.0g$ شد من طرفيه بقوة 200.0N ، عند هز أحد طرفيه مربه موجة جيبية ترددها الزاوي 12.5 rad/sec وسعتها 0.05 m .

أ- احسب طول الموجة وعددها الموجي .

ب - احسب الإزاحة للموجة وسرعة الوسط عند مسافة 0.2 m وزمن 0.01 sec

4- إذا كانت سرعة الصوت في الماء حوالى $1500.0\ m/s$، عين تردد موجة صوتية بحيث يكون طولها في الماء يساوى طول موجة صوتية في الهواء ترددها 1200.0 Hz وسرعتها 350.0m/s .

5- خيط طوله 1.0m وكتلته 2.0g ، مثبت من أحد طرفيه في شوكة رنانة ترددها 200.0Hz . احسب الشد في الخيط اللازم لتكوين موجة موقوفة بها أربع عقد .

6- قياساً على المعادلة (8.2) استنتج المعادلة (8.3) .

7- سلك مرن طوله $80.0cm$ وكتلته $0.4g$. ثُبت أُفقياً بين نقطة تثبيت وبكرة وبمسافة $50.0cm$. إذا عُلق من طرفه المدلى جسمٌ وزنه $500.0N$ فاحسب الترددات التي يهتز بها الجسم .

8- إذا كانت سرعة الصوت عند درجة حرارة $20.0^{\circ}C$ هي 344.0m/s فاحسب سرعته عند درجة حرارة $38.0^{\circ}C$.

9- غاز مثالي معزول حراريا كثافته $1.29g/cm^3$ ووزنه الجزيئى 27.0g/mole وجد تحت درجة حرارة $20.0^{\circ}C$ والنسبة بين حرارته النوعية تحت ضغط ثابت وحجم ثابت هي 1.3 ، احسب معامل المرونة الحجمى له .

10- ما الفرق بين سرعتي موجتين طوليتين في الهواء عند $-5.0^{\circ}C$ و $60.0^{\circ}C$؟

11- احسب الإجهاد في سلك معامل يونج له Y والذي يجعل سرعة الموجة الطولية في السلك تساوى ضعف سرعة الموجة المستعرضة .

12- سلك من الفولاذ طوله 0.5m وكتلته 5.0g سحب بقوة 400.0 N

أ- احسب التردد الأساسي للاهتزاز .

ب- احسب عدد النغمات التى يمكن أن يسمعها شخص يستطيع تحمل ترددات تصل إلى 20,000 Hz .

13- سلك نحاس طوله $1.0m$ وكثافته $8.9g/cm^3$ شد بقوة بين ثابتين . اهتز بتردد أساسي قدره 500.0Hz .

أ- احسب سرعة الموجة المستعرضة به .

ب- احسب الإجهاد الطولي له (F/A) .

ج- إذا كان أكبر تسارع خطي عند منتصف السلك هو $500.0m/s^2$ فاحسب سعة الاهتزاز عند هذه النقطة .

14- علق جسم مادته من النحاس بسلك من الفولاذ فكان التردد الأساسي لموجة مستعرضة موقوفة في السلك هو 400.0Hz ، أنزل الجسم في وعاء به ماء ليغمر ثلث حجمه . احسب التردد الأساسي في هذه الحالة .

15- احسب التردد الأساسي والنغمات الثلاث التالية في أنبوب طوله 30.0cm

أ- إذا كان الأنبوب مفتوح الطرفين .

ب- إذا كان الأنبوب مفتوحاً من جهة واحدة فقط .

ج- كم عدد النغمات التي يستطيع سماعها شخص سمعه عادي لكل حالة ؟

سرعة الصوت هنا $344.0m/s$.

الباب التاسع

الصوت

Acoustic Phenomena



9.1 الموجات الصوتية Sound Waves

سوف نركز في هذا الباب على الموجات الطولية المنتقلة في الهواء والتي إذا وصلت الأذن ولدت الإحساس بالصوت والأذن البشرية تحس بموجات لها ترددات بين $20.0Hz$ و $20,000,0Hz$ وأبسط أنواع الموجات الصوتية هي الموجات الجيبية التي لها طول موجي ولها سعة ولها تردد يمكن معرفتها . هذه الموجات عندما تصل طبلة الأذن تُحدث اضطراباً في الوسط بتردد وسعة محددانْ. وهذا الاهتزاز يمكن وصفه بدلالة الزيادة في الضغط على الأذن نتيجة وصول الموجة. ولسهولة استنتاج الزيادة في الضغط فإننا سنستنتجها ومنها نعرف سعة الموجة ومعلومات أخرى مفيدة عن الموجة. ولنبدأ بتمثيل الموجة بالمعادلة :

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - wt)$$

ونفرض وسطاً تمر فيه الموجة حجمه V والتغير في حجمه نتيجةً لزيادة الضغط هو ΔV ، انظر الشكل (9.1)، ومنه فإن

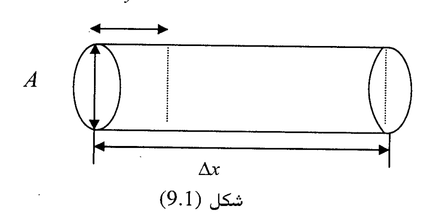
$$V = A\ \Delta x \qquad (9.1)$$

$$\Delta V = A\ \Delta y \qquad (9.2)$$

والعلاقة بينهما وبين الزيادة في الضغط هي

$$P = -B\frac{\Delta V}{V} \qquad (9.3)$$

حيث B هو معامل المرونة الحجمي للوسط. وبالتعويض عن V و ΔV ، فإن



شكل (9.1)

$$P = B\frac{\Delta y}{\Delta x} = B\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P = By_0 k\cos(kx - \omega t) = P_{max}\cos(kx - \omega t) \qquad (9.4)$$

حيث

$$P_{max} = By_0 k \qquad (9.5)$$

هو أكبر قيمة للضغط ، والمعادلة (9.5) تظهر العلاقة بين سعة الموجة وأكبر ضغط للموجة على الأذن. لكن ومن دراسة سابقة لدينا العلاقة

$$v = \sqrt{B/\rho}$$

والتي تربط سرعة الموجة الصوتية بمادة الوسط و يظهر الجدول (9.1) سرعة الصوت في مجموعة من الأوساط. ومنها فإن

$$B = \rho v^2$$

وبالتعويض فى المعادلة (9.5) عن معامل مرونة الحجم فإن

$$\begin{aligned} P_{max} &= v^2 \rho k\, y_0 \\ &= v\,\omega\,\rho\, y_0 \end{aligned} \qquad (9.6)$$

وهي صيغة أخرى للعلاقة بين الضغط والسعة.

مثال 9.1

إذا قُدر أقصي ضغط لموجة صوتية تتحمله الأذن بالقيمة 28.0 Pa ،

أ- فاحسب أكبر سعة لموجة صوتية تصل الأُذن بتردد 500.0Hz .

ب- إذا كان الضغط الواصل للأُذن من موجة لها نفس التردد ،500.0Hz هو $2.0\times10^{-5}\,Pa$ ، فاحسب السعة المقابلة له .

الحل:

أ – لدينا من العادلة (9.6) الصيغة:

$$y_0 = \frac{P_{max}}{k\,\rho\, v^2}$$

ولدينا من الجدول (9.1) $v = 331.0\ \text{m/}s$ ومنه نحسب k

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi\, f}{v} = \frac{2\,\pi \times 500.0}{331.0}\ m^{-1} \cong 9.49\ m^{-1}$$

وحيث إن كثافة الهواء هي $1.22\ kg/m^3$ و $P_{\max} = 28.0 Pa$

فإن

$$y_{\max} = \frac{28.0 Pa}{(9.49 m^{-1}) \times (1.22 kg/m^3) \times (331.0 m/s)^2} = 2.2 \times 10^{-5} m$$

أي أن سعة الموجة الصوتية التي تردد مصدرها 500.0Hz ، وتعطي أشد صوت في حدود $10.0^{-5} W/m^2$ وهي حقاً قيمة صغيرة.

ب– للأصوات الضعيفة والتي لمصدرها نفس التردد ولكن الضغط هو $2.0 \times 10^{-5}\ Pa$ فإن السعة

$$y = \frac{2.0 \times 10^{-5} Pa}{(9.49 m^{-1}) \times (1.22 kg/m^3) \times (331.0 m/s)^2} = 1.6 \times 10^{-11}\ m$$

وهذا يقارب نصف قطر الذرة ولك أن تتخيل العظمة إذ تستطيع الأُذن أن تحس موجات بهذه السعة.

جدول (9.1) سرعة الصوت في مجموعة من الأوساط

الوسط	درجة الحرارة C^0	السرعة m/s
الهواء	0.0	331.3
الهيدروجين	0.0	1286.0
الأكسجين	0.0	317.2
الماء	15.0	1450.0
الرصاص	20.0	1230.0
الألومنيوم	20.0	5100.0
النحاس	20.0	3560.0
الحديد	20.0	5130.0
القرانيت	20.0	6000.0

9.2 الطاقة والشدة للموجات الصوتية

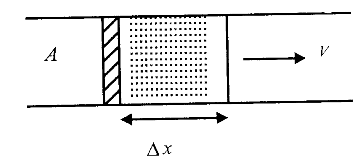
Energy and Intensity Of sound waves

لمعرفة طاقة وشدة موجة تتحرك في الهواء ، نعتبر طبقة من الهواء كتلتها Δm وعرضها Δx ملامسة لمكبس مساحته A كما بالشكل (9.2). وبتحريك المكبس فإنه ينقل طاقة إلى طبقة الهواء. وحيث إن متوسط طاقة الحركة يساوي متوسط طاقة الوضع في حركة توافقية بسيطة، فإن متوسط الطاقة للكتلة Δm يساوي طاقة الحركة القصوى.(انظر الحركة التوافقية البسيطة) وعليه فإن متوسط طاقة الطبقة المتحركة هو

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 + U = \frac{1}{2}\Delta m\, v_{\max}^2$$

أو

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\,(\omega y_0)^2 = \frac{1}{2}(\rho A \Delta x)(\omega y_0)^2 \qquad (9.7)$$



شكل رقم (2.9)

حيث $\Delta x A$ هو حجم الطبقة و U هي طاقة الوضع.

معدل انتقال الطاقة (القدرة Power) هو

$$\text{Power} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho A \frac{\Delta x}{\Delta t}(\omega y_0)^2 = \frac{1}{2}\rho A v w^2 y_0^2 \qquad (9.8)$$

ونعرف شدة الموجة I ، قدرة لكل وحدة مساحة ، بأنها معدل انسياب طاقة الموجة عبر المساحة A عمودياً على اتجاه الموجة

$$I = \frac{Power}{area} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 y_0^2 \qquad (9.9)$$

لكن

$$P_{max} = \rho v \omega y_0$$

وبالتعويض فإن

$$I = \frac{P_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{P_{\max}^2}{2\sqrt{\rho B}} \qquad (9.10)$$

وهي معادلة تربط بين خاصيتين للوسط هما الكثافة ومعامل المرونة الحجمي وخاصية موجية هي شدة الموجة. والوحدة المستخدمة لشدة الصوت هي $W.m^{-2}$ أو $W.cm^{-2}$

مثال 9.2

احسب الشدة القصوى لموجة صوتية والتي يمكن أن تتحملها الأُذن عادةً .

الحل:

نحسب الشدة باستخدام المعادلة (9.10) ونعوض عن الضغط المكن للأُذن تحمله بالقيمة $30.0Pa$ ، ونعلم أن كثافة الهواء حوالي $1.22kg/m^3$، ونحسب معامل المرونة الحجمي من

$$B = \gamma P$$

$$= 1.4 \times 1.013 \times 10^5 = 1.42 \times 10^5 \ Pa$$

$$I = \frac{P_{\max}^2}{2\sqrt{\rho B}} = \frac{(30.0Pa)^2}{2\sqrt{1.22\ kg/m^3 \times 1.42 \times 10.0^5\ Pa}} = 1.08\ W/m^2$$

أو

$$I = \frac{P_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{(30.0Pa)^2}{2 \times 1.22\ kg/m^3 \times 340.0\ m/s} = 1.08\ W/m^2$$

9.3 مستوى الشدة Intensity Level

حيث إن مدى الشدة الذي تستطيع الأذن تحمله ينحصرتقريباً بين الصفر والوحدة فإننا نستعيض عنه بمقياس بديل يعتمد على اللوغاريتم يقيس مستوى الشدة ويرمز له بالرمز β ويمكن تقسيمه إلى 120 جزءاً ويعطى بالصيغة :

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad (9.11)$$

حيث I_0 هي الشدة الصغرى وتمثل الحد الأدنى لإحساس الأذن وقيمتها 10.0^{-12} W/m^2 أما وحدة مستوى الشدة فهي الدسيبل decibel وتختصر *dB* وهي عشر البل Bel نسبة إلى جراهام بل و deci هي وحدة القياس.

ويعطي الجدول (9.2) الشدة لبعض الأصوات ومستوى الشدة المقابل لها . إذا كانت الشدة تساوي I_0 فإن مستوى الشدة يساوي صفراً، أما إذا كانت الشدة تساوي واحداً فإنها تقابل *120.0 dB* ، ويشار هنا إلى أن مقياس مستوى الشدة كان في الأصل يقاس بالبل bels ، إلا أنه ثبت كبره وعدم ملائمته فاستعيض عنه بالديسبل، والذي أصبح شائع الاستعمال .

جدول (9.2) الشدة ومستوى الشدة لبعض الأصوات

مستوى الشدة β Inten. Level *db*	الشدة I Inten. W/m^2	المصدر Source
120.0	*1.0*	حد الإيلام
95.0	3.2×10^{-3}	ماكينة قص حديد
80.0	10.0^{-4}	شارع مزدحم
65.0	3.2×10^{-6}	حديث عادي
50.0	10.0^{-7}	سيارة هادئة
10.0	10.0^{-11}	حفيف الشجر
0.0	10.0^{-12}	حد السمع

مثال 9.3

احسب أكبر زيادة في الضغط على أذن السامع بسبب كل من حد السمع وحد الإيلام. ثم احسب سعة الموجة في الحالتين وذلك عند تردد قيمته 1000.0Hz.

الحل:

لحد السمع فإن $I = 10.0^{-12} W/m^2$ ، وكثافة الهواء $\rho = 1.2\ kg/m^3$

ونعتبر سرعة الصوت $v = 342.0 m/s$ وبالتعويض فإن

$$P_{max} = (2\rho v I)^{1/2} = (2 \times 1.2 kg/m^3 \times 342.0 m/s \times 10^{-12} W/m^2)^{1/2}$$
$$= 2.86 \times 10^{-5} Pa$$

هي قيمة صغيرة جداً

أما أكبر زيادة في الضغط عند حد الإيلام فهي

$$P_{max} = (2 \times 1.2 \times 342.0 \times 1)^{1/2} = 28.6\ Pa$$

السعة في الحالة الأولى :

$$y_0 = \frac{P_{max}}{\rho \omega v}$$

وحيث إن $\omega = 2\pi f$ فإن

$$y_0 = \frac{2.86 \times 10^{-5} Pa}{1.2 kg \times 2\pi(1000.0 Hz) \times 342.0 m/s} = 1.1 \times 10^{-11} m$$

وهذه قيمة صغيرة جداً ترينا شدة حساسية الأذن.

الحالة الثانية:

$$y_0 = \frac{28.6 Pa}{1.2 kg \times (2000\pi Hz) \times 342 m/s}$$
$$= 1.1 \times 10^{-5}\ m$$

مثال 9.4

في المثال السابق إذا كانت سعة الموجة $10.0^{-5}\,m$ فاحسب مستوى الشدة لها .

الحل:

حيث إن

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad و \quad I = \frac{P_{max}^2}{2\rho v} \quad و \quad P_{max} = B k y_0$$

فإنه يمكن استنتاج أن

$$I = \frac{\omega^2 (\gamma P_{air} \rho)^{\frac{1}{2}} y_0^2}{2}$$

وبالتعويض فيها نجد أن

$$I = \frac{1}{2}(2\pi \times 1000)^2 (1.4 \times 1.013 \times 10^5 \times 1.2)^{\frac{1}{2}} \times 10^{-10}\ W/m^2 = 0.81\ W/m^2$$

لكن $\beta = 10\ log \dfrac{I}{I_0}$ وبالتعويض نحصل على مستوى الشدة ،

$$\beta = 10\ \log \frac{0.814}{10^{-12}} = 119.1\ dB$$

9.4 الموجات الكرية Spherical Waves

إذا كان المصدر كري الشكل ويهتز دورياً بحيث يتغير نصف القطر توافقياً مع الزمن فإنه يتولد دورياً موجة ذات مقدمة كرية وتتحرك بسرعة ثابتة.

وحيث إن كل النقاط على سطح الكرة لها نفس الخصائص فإن طاقة الموجة تتوزع بالتساوي في كل الاتجاهات.

فإذا كان متوسط القدرة الصادرة عن المصدر هو P_{av} فإنها تتوزع على كرة مساحتها $4\pi r^2$ وعليه فإن شدة الموجة على بعد r من المركز هي

$$I = P_{av} / 4\pi r^2 \tag{9.12}$$

وحيث إن P_{av} ثابتة دائماً فإن

$$A_1 I_1 = A_2 I_2 = \cdots = P_{av}$$

حيث A_1 ، A_2 ، .... هي مساحات على الأبعاد r_1 ، r_2 ، .... من المصدر ومنها فإن

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{9.13}$$

ومن هذه المعادلة نلاحظ أن الشدة تتناسب عكساً مع r^2 وهي علاقة صحيحة مع كثير من مصادر الطاقة مثل ضوء منبعث عن مصدر نقطي .

مثال 9.5

مصدر صوتي يرسل موجاته في كل الاتجاهات في الهواء . على بعد 10.0 m كان مستوى الشدة 60.0dB والتردد 500.0 Hz.

أ- احسب سعة الموجة عند هذه المسافة. ب- احسب أقصى زيادة في الضغط. جـ- عند أي مسافة يكون مستوى الشدة 40db .

الحل:

أ- نحسب الشدة على بعد 10.0m من علاقة مستوى الشدة

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

وبالتعويض فإن

$$60.0 = 10.0 \log \frac{I}{I_0}$$

وهي صحيحة بالصيغة

$$6.0 = \log \frac{I}{I_0}$$

$$10.0^6 = \frac{I}{I_0}$$

لكن

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(500 Hz) = 3141.6\, s^{-1}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{3141.6 s^{-1}}{342 m/s}$$

$$= 9.186\ m^{-1}$$

ومعامل المرونة الحجمي للهواء

$$B = \gamma P = 1.4 \times 1.013 \times 10^5\, Pa$$

$$= 1.42 \times 10^5\, Pa$$

ومن المعادلة

$$I = \frac{1}{2} \omega B k y_0^2$$

نجد السعة

$$y_0 = \sqrt{\frac{2I}{\omega B k}} = 2.21 \times 10^{-8} m$$

ب – نحسب أقصى زيادة في الضغط من العلاقة

$$P_{max} = Bky_0 = 2.88\times10^{-2}\,Pa$$

جـ– نحسب I_2 وهي الشدة عند مستوى 40dB

$$40 = 10\log\frac{I}{I_0}$$

$$10^4 = \frac{I}{I_0}$$

$$I_2 = 10^4 \times 10^{-12}W = 10^{-8}\,W$$

لكن

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

إذن

$$r_2^2 = (10.0m)^2(10.0^{-6}W)/10.0^{-8}w$$

$$= 10.0^4\,m^2$$

$$r_2 = 100.0\,m$$

9.5 تغير سرعة الصوت بتغير درجة الحرارة

Dependence of Speed of Sound on Temperature

نفرض أن سرعة الصوت في الوسط تتغير من v_1 إلى v_2 عندما تتغير درجة الحرارة من T_1 إلى T_2 وباستخدام المعادلة (8.8) , $v=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, وكذلك المعادلة (8.9), $v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, فإن

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

وحيث إن T تعطى بالكيلفن فإن

$$v_2' = v_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = v_1\sqrt{\frac{273 + C_2}{273 + C_1}}$$

حيث C_1 ، C_2 هما درجتا الحرارة المئوية المقابلتان للدرجتين T_1 و T_2 .

إذا اعتبرنا أن v_0 هي سرعة الصوت عند درجة الصفر المئوي فإن

$$v = v_0(1 + \frac{C}{273})^{\frac{1}{2}}$$

$$\cong v_0(1 + \frac{C}{540}) \qquad (9.14)$$

ويمكن تقريب العلاقة لتصبح

$$v_c = v_o + 0.61\,C \qquad (9.15)$$

هذا باعتبار سرعة الصوت في الهواء عند درجة الصفر هي 330 m/s .

مثال 9.6

عند درجة حرارة $20.0^0 C$ كانت كثافة الهواء $1.2\,kg/m^3$ وكانت سرعة الصوت فيه $340.0 m/s$. كم كثافة وسرعة الصوت عند درجة حرارة $40.0^0 C$ ؟

الحل :

حيث إن

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

فإن سرعة الصوت عند درجة حرارة $40.0^0 C$ هي

$$v_2 = 340\sqrt{\frac{313.0}{293.0}}\ m/s = 351.4\ m/s$$

وحيث إن

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

فإن كثافة الهواء عند درجة $40.0^{\circ}C$ هي

$$\rho = 1.2 \times \frac{293}{313}\ kg/m^3 = 1.12\ kg/m^3$$

مثال 9.7

استخدمت أنبوبة مفتوح طرفها العلوي لحساب التردد لشوكة مهتزة.ملئت الأنبوبة بالماء وقربت شوكة مهتزة من الفتحة وسمح للماء بالخروج ببطء من أسفل الأنبوبة .

عند وصول الماء إلى نقطة نسميها a سمع الرنين الأول ومع استمرار تسرب الماء لوحظ أنه على مسافة $45cm$ من a سمع الرنين الثاني.

إذا كانت درجة الحرارة $30^{\circ}C$ عند إجراء التجربة فعين تردد الشوكة .

الحل:

نعلم أن التردد يعطى بالصيغة $f = \frac{v}{\lambda}$

حيث v هي سرعة الصوت عند الدرجة $30^{\circ}C$ و λ هو طول الموجة. ولحساب السرعة فإنه يمكن استخدام التقريب الوارد في المعادلة (9.15)

$$v = v_0 + 0.61C = (330 + 0.61 \times 30) m/s = 348.3 m/s$$

وحيث إن a و b يمثلان عقدتين متتاليتين في أنبوب مفتوح فإن

$$\lambda = 2ab = 2 \times 45cm = 90cm = 0.9m$$

وبالتعويض فإن قيمة التردد هي

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{348.3m/s}{0.9m} = 387vib/\sec = 387Hz$$

9.6 النبضات Beats

تعرضنا من قبل للتداخل عند الحديث عن الموجات الموقوفة والتي تنشأ عند تلاقي موجتين لهما نفس السعة والتردد ويتحركان باتجاهين متعاكسين. والآن سندرس نوعاً آخر فيه الموجتان لهما نفس السعة ولكن يختلفان قليلاً في التردد.

ويمثل الشكل (9.3a) الموجتين بينما يمثل الشكل (9.3b) محصلتهما والتي نلاحظ فيها تغير السعة مع الزمن ، وهذا التغير في السعة يتبعه تغير في الشدة وفي حالة التطابق التام لبطنين فإننا نحصل على أكبر شدة للموجة المحصلة وهنا نسميها النبضات Beats ، وللحصول على الموجة المحصلة نمثل الموجتين بالإزاحتين y_1 و y_2 حيث

$$y_1 = A \sin \omega_1 t$$

و

$$y_2 = A \sin \omega_2 t$$

وباستخدام مبدأ المطابقة ، تكون المحصلة

$$y = y_1 + y_2 = A [\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t]$$

ولما كان

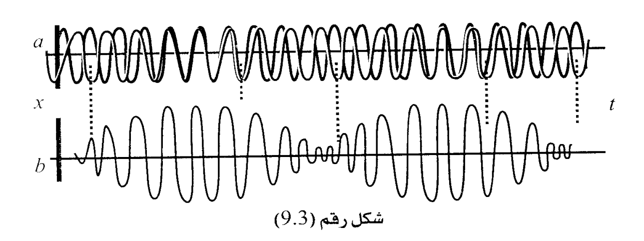
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

فإننا نكتب العلاقة السابقة على الصورة

$$y = \left[2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right]\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$$

$$y = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right)t\right]\sin 2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t$$

$$y = \left[2A\cos 2\pi\frac{\Delta f}{2}t\right]\sin 2\pi f_{av}t \qquad (9.16)$$



شكل رقم (9.3)

ويمكن اعتبار الاهتزاز الناتج بأنه اهتزاز تردده $f_{ave} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ أي متوسط تردد النغمتين المتداخلتين وسعته معطاة بالمقدار المحصور بين القوسين ، وعليه فإن السعة تتغير مع الزمن بتردد قدره $\Delta f = \frac{f_1 - f_2}{2}$ ويسمى تردد النبضة . إذا كانت قيمة f_1 قريبة من قيمة f_2 فإن قيمة هذا المقدر تكون ضئيلة ويكون التغير في السعة بطيئا. وعندما تكون السعة كبيرة يكون الصوت شديداً وبالعكس ، هذا وتحصل السعة الكبرى (أو ما أسميناه بالنبضة) عندما يساوي المقدار $\cos 2\pi\frac{\Delta f}{2}t$ القيمة 1 أو

1- وحيث إن هذه السعة تحدث مرة واحدة في الدورة لكل من القيمتين السابقتين فإن عدد النبضات في الثانية هو ضعف تردد النبضة ، أي أن عدد النبضات في الثانية يساوي الفرق بين الترددين وهذا يتم عند المساواة

$$2\pi \frac{\Delta f}{2} = n\pi$$

ومنه فإن

$$n = |\Delta f| = |f_2 - f_1| \qquad (9.17)$$

ويمثل عدد النبضات في الثانية الواحدة ويمكن للأذن أن تميز النبضات لنغمتين إلى تردد نبضة في حدود 6 Hz إلى 7 Hz

9.7 ظاهرة دوبلر The Doppler Effect

عندما يكون مصدر الصوت أو السامع أو كلاهما متحركاً فإن شدة الصوت الذي يصل السامع تختلف عن شدته في حالة السكون ويصاحب التغير في الشدة تغير في كل من طول الموجة والتردد. وهذه ظاهرة شائعة نلحظها في الانخفاض المفاجئ في الصوت الصادر عن سيارتين مسرعتين ومتعاكستين. هذه الظاهرة عُرفت بظاهرة دوبلر ، نسبة إلى العالم النمساوي كرستيان دوبلر Christian J. Doppler (1803-1853) ،والتي درس فيها العلاقة بين التردد الواصل إلى السامع والتردد الأصلي للمصدر وسرعتي المصدر والسامع وكذلك سرعة الصوت.

لتكن v هي سرعة الصوت و v_s هي سرعة المصدر و v_L هي سرعة السامع و f هي التردد الصادر عن المصدر و f' هي التردد الواصل إلى السامع والذي لا يساوي f إلا في حالة السكون و λ هي طول الموجة الصادرة عن المصدر.

والآن سنأخذ الحالة الأولى والتي فيها يتحرك السامع مع سكون المصدر.

أ- ولنبدأ بالسامع المتحرك نحو المصدر الساكن. في هذه الحالة فإن سرعة الصوت الواصل إلى الأذن هو مجموع سرعتي الصوت والسامع، $v' = v + v_L$ ، وحيث إن طول الموجة لا يتغير فإن التردد

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_L}{\lambda}$$

وبالتعويض عن سرعة الموجة بقيمتها $v = f\lambda$ فإن

$$f' = f\left(1 + \frac{v_L}{v}\right) \qquad (9.18)$$

ب- أما إذا ابتعد السامع عن المصدر الساكن فإن سرعة الموجة بالنسبة للسامع هي $v' = v - v_L$ وعليه فإن

$$f' = f\left(1 - \frac{v_L}{v}\right) \qquad (9.19)$$

وبضم المعادلتين (9.18) و (9.19) نستطيع كتابة العلاقة بين التردد الصادر عن مصدر ساكن والتردد الواصل إلى سامع متحرك كالآتي :

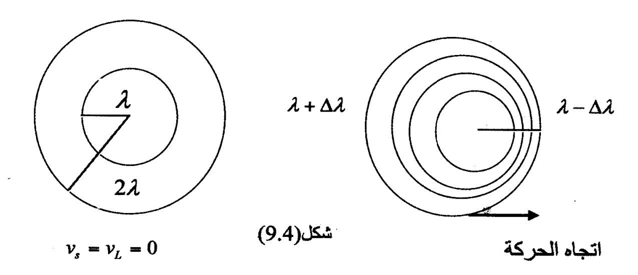
$$f' = f\left(1 \pm \frac{v_L}{v}\right) \qquad (9.20)$$

حيث إن الإشارة الموجبة تعني الحركة نحو المصدر والإشارة السالبة تعني الحركة مبتعداً عن المصدر.

والآن سنأخذ الحالة الثانية والتي فيها يتحرك المصدر مع سكون السامع. في هذه الحالة نلاحظ أن لحركة المصدر أثراً على طول الموجة فإذا اتجه المصدر نحو السامع فإن السامع يلاحظ تقارب في مقدمات الموجات نتيجة لاقتراب المصدر انظر الشكل (9.4) بينما تتباعد مقدمات الموجات في الجهة الأخرى نتيجة ابتعاد

المصدر.

وفي حالة الاقتراب نجد أن الطول الموجي نقص بمقدار $\Delta\lambda$ وفي حالة الابتعاد يزيد بمقدار $\Delta\lambda$ حيث $\Delta\lambda = v_s/f$.



شكل(9.4)

ا- الحالة الأولى هي اقتراب المصدر وسكون السامع وفي هذه الحالة سوف يكون الطول الموجي الجديد هو

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_s}{f}$$

وعليه فإن التردد الواصل إلى السامع هو

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - \frac{v_s}{f}}$$

لكن $\lambda = v/f$ وبالتعويض عنها فإن

$$f' = f\frac{v}{v - v_s} \tag{9.21}$$

الحالة الثانية هي ابتعاد المصدر وسكون السامع وفي هذه الحالة سوف يكون الطول الموجي الجديد هو

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \frac{v_s}{f}$$

و بالتعويض عنها نحصل على التردد الواصل إلى السامع

$$f' = \frac{v}{\lambda} = f\frac{v}{v+v_s} \qquad (9.22)$$

وبضم المعادلتين (9.21) و (9.22) نستطيع كتابة العلاقة بين تردد المصدر والتردد الواصل إلى سامع ساكن كالآتي :

$$f' = f\frac{v}{v \pm v_s} \qquad (9.23)$$

ثالثاً– حالة تحرك المصدر والسامع معاً وفي هذه الحالة فإننا نجد الصيغة العامة للتردد الواصل إلى السامع وذلك بضم المعادلتين (9.20) و (9.23) .

$$f' = f\frac{v \mp v_L}{v \mp v_s} \qquad (9.24)$$

الإشارات ($+ v_L$ و $- v_s$) تشير إلى أن كلاً منهما يتحرك نحو الآخر. والإشارات ($+ v_s$ و $- v_L$) تعني أن كلاً منهما يبتعد عن الآخر.

وهناك حالات تشابه الإشارات نتركها للقارئ إذ أنها تعني تحركاً في نفس الاتجاه أحدهما يتبع الآخر. نلاحظ أن كلمة نحو تعني زيادة في قيمة التردد f' ويبتعد عن تعني النقص في قيمة التردد f' .

مثال 9.7

اثبت أن المعادلتين (9.20) و (9.23) عملياً متطابقة وذلك عندما تكون سرعة المصدر وسرعة السامع صغيرتين مقارنة بسرعة الموجة .

الحل:

افرض أن

$$v_s = v_L = u$$

وعليه فإن المعادلة (9.20) تصبح

$$f' = f\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$$

وعلينا أن نثبت أن المعادلة (9.23) تؤول إلى المعادلة السابقة عند $u << v$

ويمكن كتابة المعادلة (9.23) بالصيغة

$$f' = f\left(\frac{1}{1 \pm \frac{u}{v}}\right)$$

وباستخدام المفكوك

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx \pm \frac{n(n-1)}{2}x^2 \pm \cdots$$

نحصل على

$$\frac{1}{1 \pm \frac{u}{v}} = 1 \pm \frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \pm \cdots$$

لكن $\frac{u}{v}$ صغيرة مما يمكن من إهمال $\left(\frac{u}{v}\right)^2$ والحدود التي تتبعها ومنه فإن

$$\frac{1}{1 \pm \frac{u}{v}} \cong 1 \pm \frac{u}{v}$$

ومنه تصبح المعادلة (9.23) على الصورة

$$f' = f \left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$$

وهي نفس المعادلة (9.20)

وللتدليل على هذا بمثل عددي خذ $u = 30.0$ m/s ، وخذ سرعة الصوت حوالي $330.0m/s$. وهنا فإن التردد الواصل من مصدر متحرك نحو سامع ساكن هو

$$f' = f \frac{330.0}{330.0 - 30.0} = 1.1f$$

وكذلك فإن التردد الواصل إلى سامع متحرك نحو المصدر الساكن هو

$$f' = f \frac{330.0}{330.0 - 30.0} = 1.091f \cong 1.1f$$

ومنها نلاحظ أن الفرق بين الترددين لا يزيد عن 1.0% .

مثال 9. 8

قطار يتجه إلى محطة بسرعة $25.0m/s$ ويرسل صفارة التحذير بتردد قدره $500.0Hz$

1- احسب التردد الواصل إلى سامع واقف في صالة الانتظار.

2- إذا غادر القطار المحطة بنفس السرعة ومصدراً نفس التردد فاحسب التردد الواصل في هذه الحالة إلى السامع.

الحل:

في الحالة الأولى يزداد التردد باقتراب القطار ونستخدم لذلك العلاقة (9.21)

$$f' = f \frac{v}{v - v_s}$$

نعتبر سرعة الصوت *342 m/s* ونعوض بالقيم لدينا:

$$f' = 500\text{Hz}\frac{342\text{m/s}}{342 - 25\text{m/s}} = 539.4\text{Hz}$$

أما في الحالة الثانية فإن التردد يقل نتيجة ابتعاد القطار ونستخدم العلاقة (9.22)

$$f' = f \frac{v}{v + v_s}$$

$$= 500\text{Hz}\frac{342\text{m/s}}{342\text{m/s} + 25\text{m/s}} = 466.0\text{Hz}$$

مثال 9.9

سيارة إسعاف لها سرعة 30.0 m/s ولها صفير تردده 500.0Hz والذي يُسمع من ركاب سيارة أخرى تسير بسرعة 25.0 m/s.

أ- احسب التردد الواصل إلى ركاب السيارة في حالتي اقتراب السيارتين من بعضهما وفي حالة ابتعادهما عن بعضهما .

ب- احسب التردد في حالة أن السيارتين تسيران في اتجاه واحد .

الحل:

أ- في حالة اقتراب السيارتين من بعضهما فإن التردد المسموع أعلى ما يمكن وهذا يتحقق من المعادلة

$$f' = f\frac{v+v_L}{v-v_s}$$

$$= 500.0Hz\frac{342.0m/s+25.0m/s}{342.0m/s-30.0m/s} = 588.0m/s$$

أما في حال ابتعاد السيارتين وفي اتجاهين مختلفين فإن التردد الواصل يكون أقل ما يمكن ونستخدم الصيغة الثانية

$$f' = f\frac{v-v_L}{v+v_s} = 426.0Hz$$

ب- في حالة الابتعاد وفي اتجاه واحد يكون إما الإسعاف في الأمام أو السيارة في الأمام.

1- في حالة الإسعاف في الأمام والسيارة في الخلف فإن طول الموجة يزيد أي أن :

$$f' = f\frac{v+v_L}{v+v_s}$$

$$f' = 500.0Hz\frac{342.0m/s+25.0m/s}{342.0m/s+30.0m/s} = 493Hz$$

2- في حالة السيارة في الأمام (سامع مبتعد) والإسعاف في الخلف (مصدر مقترب) فإن :

$$f' = f\frac{v-v_L}{v-v_s}$$

$$= 500Hz\frac{342m/s - 25m/s}{342m/s-30m/s} = 508m/s$$

مســـائل

1- سرعة الصوت 345.0m/s إذا لم تُعطى القيمة في أي مسألة.

أ – ما تردد مصدر لموجة صوتية طولها 2.0cm تحرك في ماء البحر حيث سرعة الصوت فيه $1.5x10^5$ cm/s ؟

ب – صوت تردده 1000.0Hz وسرعته عند الصفر المئوي 330.0m/s احسب طول موجته عند درجة حرارة 30.0^o C .

2- احسب سرعة الصوت في الهيدروجين عند درجة $0.0C^o$ حيث γ=1.4 و M=2.016g/mo1 ثم احسبه عند $30.0°C$.

3– إذا كانت سعة موجة صوتية $1.1x10^{-5}$m وترددها 1000.0Hz وسرعتها 350.0 m/s .

أ– فاحسب الضغط الواقع على أذن السامع لهذه الموجة .

ب – احسب الشدة لهذه الموجة في الهواء حيث كثافة الهواء $1.22\ g/cm^3$.

4– أ – إذا ضاعفنا قيمة أكبر ضغط فما قيمة شدة الموجة الجديد ؟

ب–إذا زادت الشدة بمعامل 16.0 فبأى قيمة يجب أن يزيد أكبر ضغط ؟

5– احسب مستوى الشدة لموجة في الهواء سعة ضغطها 0.25 Pa .

6– إذا كان β_1 و β_2 يمثلان مستوى الشدة لصوتين شدتاهما I_1 و I_2 وسعتا ضغطاهما P_1 و P_2 فاثبت أن:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

و

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \frac{P_2}{P_1}$$

7- إذا كان مستوى الشدة الواصل إلى نافذة مساحتها $1.0m^2$ هو 50db احسب معدل الطاقة و القدرة التي تدخل النافذة .

8- يبعث مصدر ضوئي قدرة كلية تساوى 20.0W في كل الاتجاهات .على أي بعد من المصدر يكون لمستوى الشدة القيمة 80.0db .

9- يرسل مصدر ضوئي موجات في كل الاتجاهات في الهواء على بعد 10.0m كان مستوى الشدة 70.0dB. و قيمة التردد 500.0Hz.

أ- كم سعة الموجة وأكبر ضغط عند هذه النقطة ؟

ب-احسب المسافة التي عندها يأخذ مستوى الشدة القيمة 50.0db.

10- موجة سرعتها $330.0m/s$ وصادرة عن مصدر تردده $600.0Hz$. إذا بعث المصدر طاقته في كل الاتجاهات وبمعدل $10.0W$.

1- فاحسب شدة الموجة على بعد $20.0m$ من المصدر. 2- واحسب سعة الموجة على نفس البعد.

11- مصدران للصوت A و B قدرتاهما على التوالي 0.1W و 0.2W لهما نفس الطور وبتردد قدره 200.0Hz

أ- احسب فرق الطور لإشارتين صادرتين منهما عند نقطة تبعد عن A 4.0m وعن B 3.0m .

ب - احسب الشدة عند هذه النقطة عند قفل A ثم احسبها عند قفل B .

جـ - احسب محصلة الشدة وكذلك مستواها عند هذه النقطة في حالة عمل كلا المصدرين.

12- قطاران يتجهان نحو بعضهما وبسرعة 90.0km/h للأول و 75.0km/h للثاني. أصدر الأول صوتا تردد 500.0Hz.

أ- احسب التردد الواصل إلى القطار الثاني.

ب- احسب التردد الواصل إلى القطار الثاني إذا تبادلا السرعتين .

جـ- احسب التردد إذا كان القطاران مبتعدين عن بعضهما وفي اتجاهين متعاكسين ثم احسبها لو أن القطار الثاني يتبع الأول .

13- ولدان مع كل منهما مصدر للصوت تردده 1000.0Hz إذا ظل أحدهما ساكنا والآخر تحرك مبتعدا بسرعة 2.0m/s فاحسب عدد النبضات في الثانية التى يسمعها كل منهما .

14- قطار يسير بسرعة 25.0m/s ويصدر صوتا بتردد 500.0Hz .

أ- احسب طول الموجة أمام وخلف القطار.

ب- احسب التردد الواصل إلى راكب في قطار آخر يسير بسرعة 15.0m/s متجها نحو الأول ثم مبتعدا عنه .



ملحق (١)

بعض العلاقات الرياضية Mathematical Relations

العلاقات الهندسية Geometrical Relations

$$1 - Sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}Cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}Cos(\alpha + \beta)$$

$$2 - Cos\alpha Cos\beta = \frac{1}{2}Cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}Cos(\alpha + \beta)$$

$$3 - Sin\alpha Cos\beta = \frac{1}{2}Sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}Sin(\alpha - \beta)$$

$$4 - Sin(\alpha \pm \beta) = Sin\alpha Cos\beta \pm Cos\alpha Sin\beta$$

$$5 - Cos(\alpha \pm \beta) = Cos\alpha Cos\beta \pm Sin\alpha Sin\beta$$

$$6 - e^{\pm i\theta} = Cos\theta \mp i\ Sin\ \theta$$

$$7 - Cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$8 - Sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$9 - Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sin^2\alpha$$

$10-Cos^2\alpha+Sin^2\alpha=1$

$11-Cos2\alpha=1-2Sin^2\alpha$

$12-Sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-Cos2\alpha)$

$13-Cos^2\alpha=\frac{1}{2}(Cos2\alpha-1)$

$14-Sin\alpha Cos\alpha=\frac{1}{2}Sin2\alpha$

$15-e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....$

$16-Cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+......$

$17-Sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+......$

$18-\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+....,x<1$

ملحق (٢)

Standard Integrations التكاملات القياسية

$n = 0,1,2,3,.....$,

$$1 - \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$2 - \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = (\frac{\pi}{4a})^{1/2}$$

$$3 - \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{n+1} a^n} (\frac{\pi}{a})^{1/2}$$

$$4 - \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$5 - \int_0^a Sin\frac{n\pi x}{a} Sin\frac{m\pi x}{a} dx = \int_0^a Cos\frac{n\pi x}{a} Cos\frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

,n=1,2,..,m=1,2,3

$$6 - \int_0^a Cos\frac{n\pi x}{a} Sin\frac{m\pi x}{a} dx = 0$$

$$7 - \int ASinaxdx = -\frac{A}{a} Cosax$$

$$8 - \int A(Cosax)dx = \frac{A}{a} Sinax$$

$$9 - \int Ae^{ax}dx = \frac{A}{a}e^{ax}$$

$$10 - \int xSinaxdx = \frac{1}{a^2}Sinax - \frac{x}{a}Cosax$$

$$11 - \int xe^{ax}dx = (ax-1)\frac{e^{ax}}{a^2}$$

$$12 - \int x^2e^{ax}dx = e^{ax}(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3})$$

ملحق (٣-أ)

بعض الرموز

الكمية	الوحدة الدولية (SI)	المادة
الطول	متر	m
الكتلة	كيلو جرام	kg
الزمن	ثانية	s
درجة الحرارة المطلقة	كلفن	K
القوة	نيوتن	N
الضغط	باسكال	Pa
الطاقة	جول	J
القدرة	واط	W

ملحق (٣-ب)

بعض الثوابت

كثافة الماء	$1000\ kg/m^3$
كثافة الزئبق	$13600\ kg/m^3$
الحرارة النوعية للماء	$4187\ J/kg.K$
عجلة الجاذبية الأرضية	$9.8\ m/s^2$
ضغط جوي واحد	$1.013\times10^5\ Pa$
الثابت العام للغازات	$8.314\ J/mol.K$
عدد أفوجادرو	$6.023\times10^{23}\ M/mol$
ثابت ستيفان- بولتزمان	$5.67\times10^{-8}\ W/m^2K^4$
سرعة الضوء	$2.9979\times10^8\ m/s$
ثابت بولتزمان	$1.38\times10^{-23}\ J/K$
ثابت رايدبرج	$1.0977\times10^{-7}em^{-1}$
ثابت بلانك	$6.6261\times10^{-34}\ J\cdot S$
الثابت الشمسي	$1353\ J/m^2\cdot s$

المراجع

1- الفيزياء الحديثة للجامعات - سيرز، زيمانسكي، وينج - جامعة الرياض السعودية .

2- أساسيات الفيزياء . الجزء الأول - أحمد شوقي عمار - دار راتب الجامعية .بيروت .

3- الفيزياء التطبيقية الجزء الثاني - محمد عيد المقصود الجمال - دار راتب الجامعية .بيروت

4- المبادئ الأساسية للفيزياء العامة - عبد المنعم حسان وآخرون - دار العلم للطباعة والنشر- السعودية .

5- أساسيات الفيزياء ف.بوش - دار المريخ للنشر - الرياض .

6- أساسيات الميكانيكا وخواص المادة - رأفت كامل واصف - دار المعارف - القاهرة .

7- أساسيات الفيزياء الكلاسيكية والمعاصرة - رأفت كامل واصف - دار النشر للجامعات المصرية - مكتبة الوفاء .

المراجع الأجنبية

1- University physics, 7th Edition . Sears , Zemansky, Young Addison – Wesley Pub.com

2- Physics, Alonso – Finn . Addison – Wesley Pup .com.

3- College physics, Sears , Zemansky , third Edition . Addison – wesely .

4- Concepts in physics, Benumof . prentice Hall.

5- Physics , Halliday and Resnick . third Edition , wiley .

6- Fundamentals of physics , Halliday , Resnick , walker , sixth Edition . Wiley .

7- Thermal L physics P.Morse , Benjamin ....

8- Heat , thermodynamics , and statisrical physics , F. Crawford , Harcourt, prace and world , Inc.

9- Physics for Scientists and Engneers third edition , Serway, Saunders. College publishing, Chicago .

10- The physics problem solver M.Fogiel , Research and Education Association. New York .

11- Solutions Guide to accompary Universiny physics A.lewis lord .